

普通高等教育机械类“十二五”规划系列教材

# 机械工程控制基础

## 学习指导与题解

曾孟雄 李 郁 赵千惠 编著

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

## 内 容 简 介

本书是根据普通高等学校机械类机械工程控制基础课程教学大纲和课程要求而编写的, 针对经典控制理论内容进行归纳总结式学习辅导, 精选针对性强的例题给出详细解题步骤, 对全部习题予以解析。

本书为曾孟雄等编著的《机械工程控制基础》教材的配套教辅, 其体系、内容、章节与教材完全对应。每章均设有基本要求及重难点、本章学习指导、例题题解和习题解析 4 部分。

本书适用于高等工科院校机械类各专业, 可供大学本科生和报考普通硕士研究生与工程硕士等的读者学习、参考使用。

未经许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。  
版权所有, 侵权必究。

## 图书在版编目 ( C I P ) 数据

机械工程控制基础学习指导与题解 / 曾孟雄, 李郁, 赵千惠编著. —北京: 电子工业出版社, 2012.4  
普通高等教育机械类“十二五”规划系列教材  
ISBN 978-7-121-16154-4

I. ①机… II. ①曾… ②李… ③赵… III. ①机械工程—控制系统—高等学校—教学参考资料 IV. ①TP273  
中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 037462 号

策划编辑: 李 洁

责任编辑: 刘 凡

印 刷:

装 订:

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 787×1092 1/16 印张: 12.75 字数: 326.4 千字

印 次: 2012 年 4 月第 1 次印刷

定 价: 27.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 [zlts@phei.com.cn](mailto:zlts@phei.com.cn), 盗版侵权举报请发邮件至 [dbqq@phei.com.cn](mailto:dbqq@phei.com.cn)。

服务热线: (010) 88258888。

# 前 言

本书是根据普通高等学校机械类机械工程控制基础课程教学大纲和课程要求而编写的。全书力求按认知规律围绕“快速性、稳定性、准确性”的工程设计基本要求和“系统”、“动态”两个观点针对经典控制理论内容进行归纳总结式学习辅导。每章均设有基本要求及重难点、本章学习指导、例题题解和习题解析 4 部分。学习指导部分尽量用图表归纳总结，突出学习目标，使读者清晰快捷地明确学习主线；例题题解部分精选针对性强的例题和部分研究生入学考试题并给出详细解题步骤，注重解题思路清晰，方法简便多样；习题解析部分对原教材中的每道习题都进行了详细剖析、诠释和解答。

本书为曾孟雄等编著的《机械工程控制基础》教材的配套教辅，其体系、内容、章节与教材完全一致。全书共 7 章。第 1 章为机械工程控制概述；第 2 章为控制系统的数学模型；第 3 章为控制系统的时域分析；第 4 章为控制系统的频域分析；第 5 章为控制系统校正；第 6 章为离散控制系统；第 7 章为控制系统的建模仿真。本书附录提供了 L 变换法与 Z 变换法，供读者参考。

本书由三峡大学曾孟雄、赵千惠和西北工业大学明德学院的李郁共同编著。各章重难点与学习要点和第 1~5 章例题题解由曾孟雄编写，第 6~7 章例题题解由李郁编写，各章习题解析由赵千惠和曾孟雄编写；欧阳文参与了本书部分文档的输入和整理工作，全书由曾孟雄整理定稿。本书由三峡大学机械设计制造及其自动化国家特色专业建设项目资助。在编写本书过程中，原教材编写与审稿人员张屹、刘春节和方子帆等对本书的编写给予了大力支持，在此深表谢意。

本书适用于高等工科院校机械类各专业，可供大学本科生和报考普通硕士研究生与工程硕士等的读者学习或复习参考使用。

本书中难免存在疏漏和不当之处，恳请读者不吝指正。

编 者

# 目 录

第 1 章 机械工程控制概述	(1)
1.1 基本要求及重难点	(1)
1.2 本章学习指导	(1)
1.2.1 机械工程控制概述	(1)
1.2.2 控制系统的分类	(3)
1.2.3 控制系统的组成和基本要求	(5)
1.2.4 课程性质与任务	(6)
1.3 例题题解	(7)
1.4 习题解析	(10)
第 2 章 控制系统的数学模型	(18)
2.1 基本要求及重难点	(18)
2.2 本章学习指导	(18)
2.2.1 系统的数学模型与微分方程	(18)
2.2.2 系统分析的基本数学工具——传递函数	(20)
2.3 例题题解	(26)
2.4 习题解析	(36)
第 3 章 控制系统的时域分析	(48)
3.1 基本要求及重难点	(48)
3.2 本章学习指导	(48)
3.2.1 系统响应构成与时域特征	(48)
3.2.2 系统时域动态性能分析	(50)
3.2.3 控制系统的稳定性	(56)
3.2.4 系统误差时域分析	(58)
3.3 例题题解	(61)
3.4 习题解析	(69)
第 4 章 控制系统的频域分析	(87)
4.1 基本要求及重难点	(87)
4.2 本章学习指导	(87)
4.2.1 频域特性的基本概念	(87)
4.2.2 典型环节和一般系统的频率特性	(89)
4.2.3 频率特性的性能指标	(94)
4.2.4 控制系统的频域稳定性	(95)
4.3 例题题解	(97)
4.4 习题解析	(104)

第 5 章 控制系统校正	(113)
5.1 基本要求及重难点	(113)
5.2 本章学习指导	(113)
5.2.1 系统校正概述	(113)
5.2.2 控制系统时频性能指标及转换关系	(115)
5.2.3 系统的无源校正	(116)
5.2.4 PID 校正与典型设计	(120)
5.3 例题题解	(124)
5.4 习题解析	(134)
第 6 章 离散控制系统	(148)
6.1 基本要求及重难点	(148)
6.2 本章学习指导	(148)
6.2.1 离散控制系统概述	(148)
6.2.2 离散控制系统的数学模型	(149)
6.2.3 离散控制系统分析	(151)
6.3 例题题解	(154)
6.4 习题解析	(163)
第 7 章 控制系统的建模仿真	(169)
7.1 基本要求及重难点	(169)
7.2 本章学习指导	(169)
7.3 例题题解	(170)
7.4 习题题解	(178)
附录 A L 变换与 L 逆变换	(187)
A.1 拉普拉斯变换的定义	(187)
A.2 典型函数的拉普拉斯变换	(187)
A.3 拉普拉斯变换的主要定理	(190)
A.4 拉普拉斯逆变换	(191)
附录 B Z 变换与 Z 逆变换	(193)
B.1 Z 变换的定义	(193)
B.2 Z 变换求法	(194)
B.3 Z 变换的基本定理	(195)
B.4 Z 逆变换	(196)
参考文献	(198)

# 第1章 机械工程控制概述

## 1.1 基本要求及重难点

### 基本要求

- 了解控制理论的发展概况;
- 熟悉机械控制的研究对象与任务;
- 掌握反馈和反馈控制的基本原理以及在控制系统中的应用;
- 熟悉控制系统的基本组成及各部分的作用;
- 掌握控制系统的基本分类以及对控制系统的基本要求;
- 了解本教材的体系结构和学习方法。

### 教学重点

- 机械控制的研究对象与任务;
- 反馈控制的基本原理;
- 控制系统的基本分类和基本要求。

### 教学难点

- 控制系统原理示意图到系统框图的转化。

## 1.2 本章学习指导

### 1.2.1 机械工程控制概述

#### 1. 控制理论与机械工程控制

控制理论是自动控制、电子技术、计算机科学等多种学科相互渗透的产物,是关于控制系统建模、分析和综合的一般理论。其任务是分析控制系统中变量的运动规律和如何改变这种运动规律以满足控制需求,为设计高性能的控制系统提供必要的理论手段。

控制理论主要研究两方面问题:一是在系统的结构和参数已经确定的情况下,对系统的性能进行分析,并提出改善性能的途径;二是根据系统要实现的任务,给出稳态和动态性能指标,要求组成一个系统,并确定适当的参数,使系统满足给定的性能指标。

控制理论在日渐成熟的发展过程中推广到了工程技术领域,体现为工程控制论,在同机械工业相对应的机械工程领域中体现为机械工程控制论。机械制造技术发展的一个重要方向是紧密地同信息科学交融和深刻地引入控制理论,形成机械工程的学科分支。

控制理论分为经典控制理论和现代控制理论两部分。经典控制理论的研究对象是单输入、单输出的自动控制系统,特别是线性定常系统。它主要研究系统运动的稳定性,时间域和频率域中系统的运动特性,控制系统的设计原理和校正方法。现代控制理论是建立在状态空间基础之上的,研究对象包括单变量系统和多变量系统,定常系统和时变系统。其基本分析和综合方法是时间域方法,包括各类系统数学模型的建立及其理论分析。

控制理论的发展历史可分为四个阶段:经典控制理论阶段、现代控制理论阶段、大系统控制理论阶段和智能控制阶段。

本书主要介绍经典控制理论。

## 2. 机械工程控制论的研究对象

机械工程控制论主要研究机械工程技术中广义系统的动力学问题。它研究机械工程广义系统在一定外界条件下,从系统初始条件出发的整个动态历程,以及在这个历程中和历程结束后所表现出来的动态特性和静态特性,研究系统及其输入、输出三者之间的动态关系。

(1) 系统。系统是由相互联系、相互作用的若干部分构成,而且有一定目的或一定运动规律的一个有机整体。通常研究机械工程中的实际问题时就可以把研究对象看做一个系统。

工程控制论研究的系统是广义系统,系统可大可小,可繁可简,可虚可实,完全由研究需要而定。系统一般具有固有特性,由其结构和参数决定。

(2) 系统的研究类型。系统由于其内部机制和与外界的相互作用,都会有相应的行为表现。研究系统就是研究系统和输入、输出三者之间的相互关系。工程控制论对系统及其输入、输出三者之间动态关系的研究内容大致包括以下五种研究类型:

① 当系统已定、输入(或激励)已知时,求出系统的输出(或响应),并通过输出来分析研究系统本身的问题,这类研究称为系统分析。

② 当系统已定时,确定输入,且所确定的输入应使得输出尽可能符合给定的最佳要求,这就是最优控制问题。

③ 当输入已知时,确定系统,且所确定的系统应使得输出尽可能符合给定的最佳要求,这就是最优设计问题。

④ 当输出已知时,确定系统,以识别输入或输入中的有关信息,这就是预测或滤波问题。

⑤ 当输入、输出均已知时,求出系统的结构与参数,即建立系统的数学模型,这就是系统识别或系统辨识问题。

机械工程控制以经典控制理论为核心,主要研究线性控制系统的分析问题。

(3) 外界条件。系统自身无法体现自身性能,需要给系统一定的外界条件施加影响,以此产生系统的输出(或响应),通过系统输出的表现来反映和分析研究系统本身的性能。

系统的外界条件是指对系统的输入(激励),包括人为激励、控制输入、干扰输入等。

系统的输入又称为“激励”。激励本质上是主体与客体的交互过程,在一定时空环境下,激励主体采用一定手段激发激励客体,使激励客体朝着目标前进。人为有意识地加到系统中的激励称为“控制”,偶然因素产生而无法完全人为控制的输入称为“扰动”。在实际的控制系统

中, 给定输入和扰动往往是同时存在的。另外, 系统在时间为 0 时的初始状态也视为一种特殊的输入。

通常, 把能直接观察到的响应称为输出。在经典控制理论中, 响应即输出, 一般都能测量观察到; 而在现代控制理论中, 状态变量不一定都能观察到。系统的输出是分析系统性能的主要依据。

(4) 动态过程与特性。从时间历程角度看, 在输入作用下, 系统输出从初始状态到达新的状态, 或系统从一种稳态到另一种稳态之间都会出现一个过渡过程, 也称为动态过程或动态历程。实际系统在输入信号的作用下, 其输出过程包含瞬态过程和稳态过程两部分。

实际系统发生状态变化时总存在一个动态过程, 其原因是系统中总有一些储能元件(如机械系统中的阻尼器、弹簧), 使输出不能立即跟随其输入的变化。在动态过程中, 系统的动态性能得到充分体现, 如输出响应是否迅速(快速性)、动态过程是否有振荡或振荡程度是否剧烈(平稳性)、系统最后是否收敛稳定下来(稳定性)等。动态过程结束后, 系统进入稳态过程, 也称为静态过程。系统的稳态过程主要反映系统工作的稳态误差(准确性)。快速性、稳定性、准确性是系统设计的三大指标要求。

## 1.2.2 控制系统的分类

### 1. 按输入量的变化规律分类

按输入量变化规律分, 控制系统可分为恒值控制系统、程序控制系统和随动系统。

恒值控制系统的输入量在系统运行过程中始终保持恒定。其任务是保证在任何干扰作用下维持系统输出量为恒定值。恒值控制系统分析的重点是克服扰动对被控量的影响。

程序控制系统的输入量是事先设定好的不为常数的给定函数, 变化规律预先可知, 其任务是保证在不同运行状态下被控量按照预定的规律变化。

随动控制系统的输入量不恒定、不按已知规律变化, 而是按事先不能确定的一些随机因素而改变, 所以被控量也是跟随这个预先不能确定的输入量而随时变化。其任务是当输入量发生变化时, 要求输出量迅速而平稳地跟随着变化, 且能排除各种干扰因素的影响, 准确地复现控制信号的变化规律。

### 2. 按反馈分类

按控制系统的结构中有无反馈控制作用分, 控制系统可分为开环控制系统、闭环控制系统和复合控制系统。

开环控制系统是指系统的输出量对控制作用没有影响的系统。开环控制系统用一定的输入量产生一定的输出量, 既不需要对输出量进行测量, 也不需要将输出量反馈到输入端进行比较, 对于每一个参考输入量有一个固定的工作状态与之对应。如果由于某种扰动作用使系统的输出量偏离原始值, 开环系统没有纠偏的能力。若要进行补偿, 只能再借助人工改变输入量, 所以开环系统的控制精度较低。

凡是系统输出量与输入端之间存在反馈回路的系统就称为闭环控制系统。若反馈信号是与输入信号相减而使偏差值越来越小, 称为负反馈; 反之, 则称为正反馈。负反馈控制是一个利用偏差进行控制并最后消除偏差的过程。闭环控制系统具有自动修正被控制量出现偏差的能



力,可以修正元件参数变化及外界扰动引起的误差,所以其控制效果好、精度高。

将开环控制和闭环控制配合使用,可组成复合控制系统。例如前馈-反馈控制系统,当发生扰动但被控量还没反应时,前馈控制器先按扰动量的大小和方向进行“粗略”调整,尽可能使控制作用在一开始就基本抵消扰动对被控量的影响,使被控量不致发生大的变化。被控量出现的“剩余”偏差则通过闭环回路的校正作用来进行微调。

### 3. 按传递信号的性质分类

按系统中传递信号的性质分,控制系统可分为连续控制系统和离散控制系统。

系统中各部分传递的信号都是连续时间变量的系统称为连续控制系统,其控制规律多采用硬件组成的控制器实现,描述连续控制系统的数学工具是微分方程和拉普拉斯变换,连续控制系统的特点是系统中所有环节之间的信号传递是不间断的,而且各个环节的输入量与输出量之间存在的都是连续的函数关系,所以控制作用也是连续的。

在某一处或数处的信号是脉冲序列或数字量传递的系统称为离散控制系统,其控制规律一般是用软件实现的,描述此种系统的数学工具是差分方程和 $Z$ 变换。在离散控制系统中,数字测量、放大比较、给定等部件一般由微处理器实现。

### 4. 按系统的数学描述分类

按系统的数学描述分,控制系统可分为线性控制系统和非线性控制系统。

系统中所有的元件、部件都是线性的,输入与输出之间可以用线性微分方程来描述的系统称为线性控制系统。线性系统的重要特点是满足叠加原理,这对于分析多输入、多输出的线性系统具有重要意义。

当控制系统中存在非线性元件、部件时,该系统称为非线性系统,其输入/输出关系需要用非线性微分方程来描述。

### 5. 按系统输入/输出信号数量分类

按系统输入/输出信号的数量分,控制系统可分为单变量系统和多变量系统。

单变量是从系统外部变量的描述来分类的,不考虑系统内部的通路与结构。单变量系统只有一个输入量和一个输出量,但系统内部的结构回路可以是多回路的,内部变量也可以是多种形式的。单变量系统是经典控制理论的主要研究对象。

多变量系统有多个输入量和多个输出量,当系统输入与输出信号多于一个时就称为多变量系统。多变量系统的特点是变量多,回路也多,而且相互之间呈现多路耦合,研究起来比较复杂。多变量系统是现代控制理论研究的主要对象。

### 6. 按闭环回路的数目分类

按系统闭环回路的数目,控制系统可分为单回路控制系统和多回路控制系统。

单回路控制系统只有被控量的一个量反馈到控制器的输入端,形成一个闭合回路。如果除被控量反馈到控制器输入端之外,还有另外的辅助信号也作为反馈信号送到控制系统的某一个入口,形成一个以上的闭合回路,即形成多回路控制系统。

### 1.2.3 控制系统的组成和基本要求

#### 1. 系统组成和基本环节（元件、装置）

典型反馈控制系统结构如图 1-1 所示，它表示了控制系统各元件在系统中的位置和相互之间的关系。

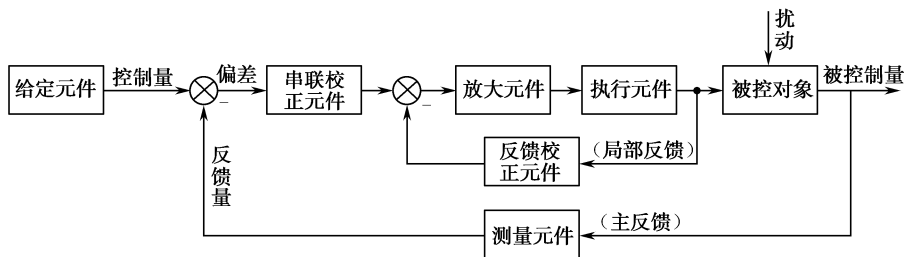


图 1-1 典型反馈控制系统结构

(1) 给定环节：产生控制系统的输入量（给定信号），一般与期望的输出相对应。输入信号的量纲与主反馈信号的量纲相同。给定元件通常不在闭环回路中，可以有各种形式，以电类元件居多。

(2) 测量环节：测量被控制量，产生与被控制量有一定函数关系的信号，起反馈作用，一般为非电量电测。测量元件的精度直接影响控制系统的精度。

(3) 比较环节：比较控制量和反馈量并产生偏差信号。

(4) 放大环节：对偏差信号进行幅值或功率的放大以足够的功率来推动执行机构或被控对象，以及对信号形式进行变换。

(5) 执行环节：直接推动被控对象，使其被控量发生变化。执行元件应具有足够大的功率和足够宽的工作频带。

(6) 校正环节：为改善或提高系统的动态和稳态性能而在系统基本结构基础上增加的校正元件。校正元件是根据被控对象特点和性能指标的要求而设计的。校正元件串联在由偏差信号到被控制信号间的前向通道中的称为串联校正；校正元件在反馈回路中的称为反馈校正。

(7) 被控对象：控制系统所要控制的对象，系统输出量即为被控量。设计控制系统时，认为被控对象是不可改变的。

系统的环节（元件、装置）在具体实现时不一定是各自独立的，可能是一个实际元件同时担负几个元件的作用，也可能是几个实际元件共同担负一个元件的作用。

#### 2. 控制系统中的量

(1) 被控量：也称为输出量或被控参量，是系统中按规定任务需要加以控制的物理量。

(2) 控制量：也称为给定量或控制输入，是根据要求与输出量相适应的预先给定信号。

(3) 干扰量：也称为扰动量，干扰或破坏系统按预定规律运行的各种外部和内部条件。

(4) 输入量：是控制量与干扰量的总称，一般多指控制量。

(5) 反馈量：由输出端引回到输入端的量。

- (6) 偏差量：控制量与反馈量之差。
- (7) 误差量：实际输出量与希望输出量之差值。

### 3. 控制系统的基本要求

评价控制系统好坏的指标是多种多样的，但对控制系统的基本要求一般可归纳为稳定性、快速性、准确性。

(1) 稳定性。控制系统能起控制作用，首先必须稳定，且必须满足一定的稳定裕量。即使受到外界短暂干扰或系统参数发生某些变化时，也能够使系统保持稳定的工作状态。稳定性是系统动态过程的振荡倾向和系统能否恢复平衡状态的性能。

(2) 快速性。快速性是在系统稳定性的前提下提出的，反映对控制系统动态过程持续时间的要求。系统从一种平衡状态到另一种平衡状态都存在一个过渡过程。快速性是指当系统输出量与给定输入量之间产生偏差时，消除这种偏差的快速程度。一般希望系统从扰动开始到系统达到新的平衡状态的过渡过程时间尽可能短。

(3) 准确性。准确性反映系统的控制精度，一般用系统的稳态误差来衡量。稳态误差是指系统稳定后的实际输出与期望输出之间的差值。稳态误差反映了动态过程后期的性能，是衡量系统品质的一个重要指标。

对一个控制系统要求稳定性、快速性、准确性三方面都达到很高的质量往往是不可能的，因为三者之间往往是相互制约的。在设计与调试过程中，若过分强调系统的稳定性，可能会导致系统响应迟缓和精度较低；若过分强调系统响应的快速性，又会使系统的振荡加剧，甚至引起不稳定。不同的生产过程对稳定性、快速性和准确性的具体要求和主次地位是不同的，设计时，一般总是在满足稳定性要求后，对准确性和快速性进行综合考虑。

#### 1.2.4 课程性质与任务

本课程是一门技术基础课。课程以数学、物理及有关科学为理论基础，以机械工程中系统动力学为抽象、概括与研究的对象，运用信息的传播、处理与反馈进行控制的思维方法与观点，作为桥梁作用将数理基础课程与专业课程紧密结合起来。

本课程的任务是使学生通过课程学习，掌握控制理论的基本原理，学会以动力学的基本观点对待机械工程系统，能够从整体系统的角度研究系统中信息传递及反馈控制的动态行为，结合生产实际来考察、分析和解决机械工程中的实际问题。

学习本课程应力求掌握如下特点：

- (1) 围绕工程设计基本要求“稳定性、快速性、准确性”对系统进行分析与校正。
- (2) 坚持“系统”和“动态”两个观点，将研究对象抽象为系统，运用控制理论的方法解决机械工程中的实际问题。
- (3) 贯彻“时域”和“频域”两条分析主线对系统性能进行分析或设计。

学习本课程时，既要十分重视抽象思维了解一般规律，又要充分注意结合实际，联系专业努力实践；既要善于从个性中概括出共性，又要善于从共性出发深刻了解个性；学习运用广义系统动力学的方法去抽象与解决实际问题。

## 1.3 例题题解

**例 1.1** 已知某电动机转速控制系统原理图如图 1-2 所示。试画出系统的原理框图；分析系统的工作原理。

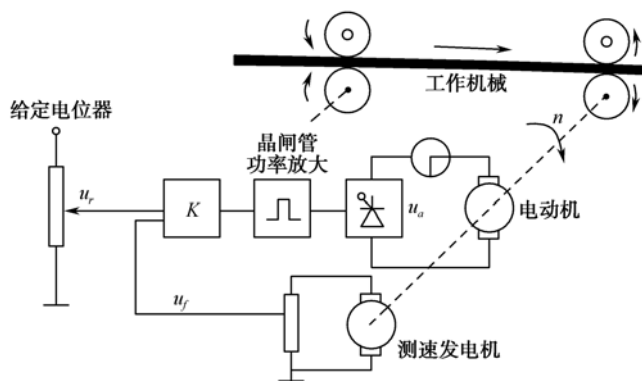


图 1-2 电动机转速控制系统原理图

**解** 通过画直流转速控制系统的原理框图，加深对控制系统基本概念和工作原理的理解。在此基础上，总结出反馈控制规律。

### 1) 系统原理框图

本系统的控制任务是控制工作机械的转速保持恒定值。系统的输入量是给定电压  $u_r$ ，对应于希望转速  $n_r$ ，输出量（被控量）是工作机械的转速  $n$ ，工作机械是被控对象，负载的变化是系统的扰动输入。测速发电机是测量元件，它将电动机的转速转换成电压信号  $u_f$  并反馈到输入端。放大器是比较放大元件，可控整流装置和电动机是执行机构。按照信号传递的顺序和方向，由输入量开始，将各部分连接起来，画出的系统原理框图如图 1-3 所示。



图 1-3 转速控制系统原理框图

### 2) 系统的工作原理

当系统由于负荷的变化使工作机械的转速  $n$  下降时， $u_f$  随之下降， $u_r - u_f$  上升，该误差信号经过放大及可控整流，使电枢电压  $u_a$  增大，从而使电动机带动工作机械的转速上升，进而促使  $u_r - u_f$  减小，完成控制作用，补偿了扰动对被控量  $n$  的影响。

通过本题可知，反馈控制系统能够使被控量克服各种扰动的影响而按给定值的要求变化。当被控量偏离给定值时，测量元件就测得被控量的值，经物理量变换后，由比较元件将其与给

定值相比较而得到偏差值；根据偏差大小，经放大器、调节装置及执行机构等产生控制作用，使被控量恢复或趋近于要求值，从而使偏差消除或减小。

**例 1.2** 电冰箱制冷系统原理图如图 1-4 所示。试简述系统的工作原理，指出被控对象、被控量和给定量，并画出制冷系统的框图。

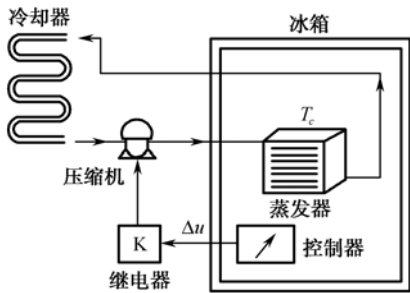


图 1-4 电冰箱制冷系统原理图

**解** 控制系统的被控对象是看得见的实体，不能与物理量相混淆。被控制量则是被控对象中表征被控对象工作状态的物理量。确定控制对象要根据控制的目标与任务而定。

本题系统的控制任务是保持电冰箱内的温度  $T_c$  等于设定的希望温度  $T_r$ 。电冰箱的箱体是被控对象，箱内温度是被控量。由控制器旋钮设定出与希望温度  $T_r$  值相对应的电位器输出电压是给定量。

系统工作原理：温度控制器中的双金属温度传感器（测量元件）感受电冰箱内的温度，并把它转换为电压信号，与控制器旋钮设定出的电位器（给定元件）输出电压（对应于与希望温度  $T_r$ ）相比较，利用偏差电压  $\Delta u$ （表征实际温度和希望温度的偏差）控制继电器。当  $\Delta u$  大到一定值时，继电器接通压缩机启动，将蒸发器中的高温低压气态制冷液送到冷却器中散热。降温后流出的低温低压冷却液被压缩成低温高压液态进入蒸发器急速降压扩散成气体，吸收箱体内部的热量，使箱体内温度降低，而高温低压制冷剂又被吸入冷却器。如此循环，使电冰箱达到制冷效果。

电冰箱制冷系统框图如图 1-5 所示。

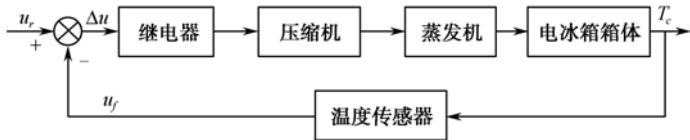


图 1-5 电冰箱制冷系统框图

**例 1.3** 卷绕加工系统原理图如图 1-6 所示，为了避免发生像进裂、拉伸变形或褶皱等不良现象，通常使被卷物的张力保持在某个规定的数值上，这就是典型的恒张力控制系统。试简述其工作原理，并绘制控制系统的结构框图。

**解** 卷绕加工系统为一恒张力控制系统，其控制任务是使被卷物上保持恒定的张力。被控对象为开卷筒，被控量为被卷物（如纸张、布匹等）上的张力，给定输入量是电位器的给定输入电压，浮动滚筒和偏角检测器共同构成检测装置，将张力变化转化为相应的电压值，外部扰动、被卷料的不均匀或开卷有效直径减小等原因均会对系统的输出产生干扰。

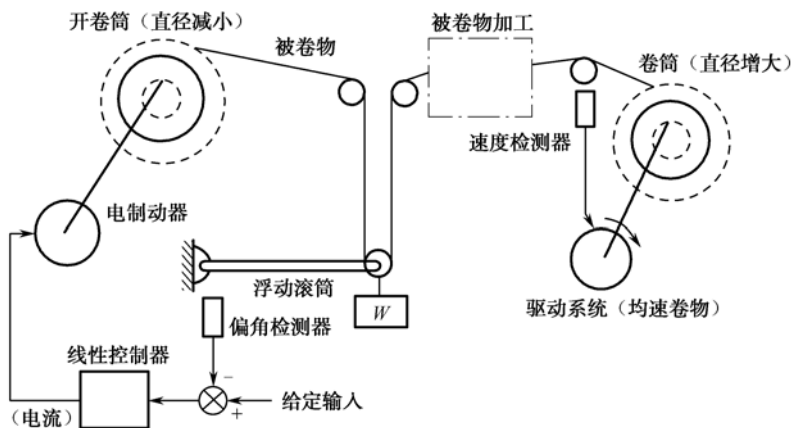


图 1-6 卷绕加工系统原理图

原理图的右边是卷绕驱动系统，由驱动系统以恒定的线速度卷绕被卷物。速度检测器提供反馈信号以使驱动系统保持恒定的线速度；开卷筒与电制动器相连接，以保持一定的张力。为保持恒定的张力，被卷物将绕过一个浮动的滚筒，滚筒具有一定的重量，滚筒摇臂的正常位置是水平位置，这时被卷物的张力等于浮动滚筒总重量的一半。

在实际运行中，因为外部扰动，被卷物的不均匀或开卷筒有效直径的减小而使张力发生变化时，滚筒摇臂便保持不了水平位置，这时通过偏角检测器测出偏角位移量，并将其转化为电压信号，与给定输入量相比较，两者的偏差电压经放大后控制电制动器。若张力过大，则使电制动器的力矩降低，以减少张力；反之，若张力过小，则制动力矩增大以增大张力，从而保持恒定的张力。

系统的结构框图如图 1-7 所示。

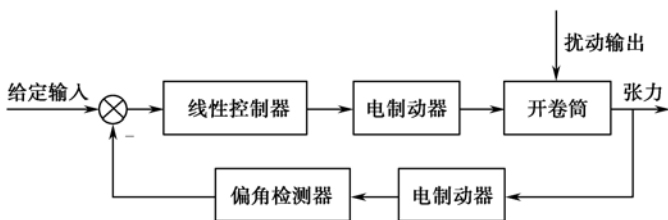


图 1-7 卷绕加工系统框图

**例 1.4** 某龙门刨床速度控制系统原理如图 1-8 所示。其中，SM 为电枢控制的直流电动机，TG 为测速发电机，FD 为放大器，CF 为触发器，KZ 为晶闸管整流装置。试分析系统的工作原理，并画出系统的原理框图。

**解** 该控制系统的任务是控制龙门刨床中电动机的转速为恒定值，系统以测速发电机作为测量元件构成反馈回路，形成闭环控制系统。

**工作原理：**当龙门刨床工作时，给定电压  $u_i$  与测速发电机的反馈电压  $u_f$  比较后得到偏差电压信号  $\Delta u$ ，经过放大环节 FD，再经过触发电路 CF，作为控制晶闸管的触发电压整流输出电压  $u_d$  供直流电动机工作。此时电动机输出转速  $n$ ，同时，经过测速发电机测速，形成反馈

电压  $u_f$ ，在放大器输入端经比较形成  $\Delta u = u_i - u_f$ 。当实际转速与给定转速不同时， $\Delta u$  值为正或者为负，放大器的输出  $u_k$  发生变化，经过触发电路 CF、晶闸管整流装置 KZ，控制  $u_d$  输出，从而改变电动机的转速，当  $\Delta u = 0$  时，实际转速与给定转速相等，达到控制转速为恒值的目的。

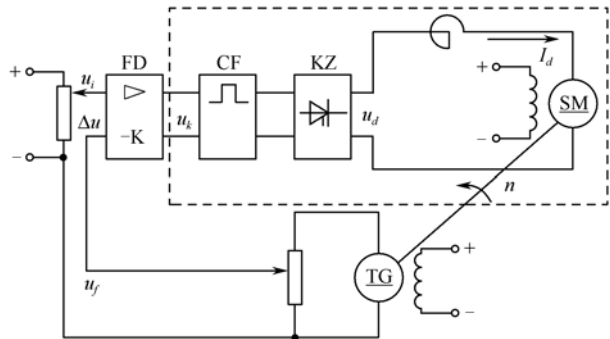


图 1-8 龙门刨床速度控制系统原理图

根据系统的结构，画出原理框图如图 1-9 所示。

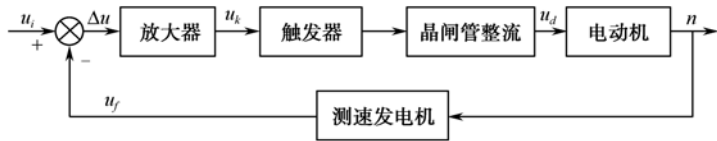


图 1-9 龙门刨床速度控制系统框图

1.4 习题解析

**题 1.1** 机械工程控制论的研究对象和任务是什么？闭环控制系统的工作原理是什么？

**【解析】** 本题要求加深对机械工程控制基本概念的理解，从研究对象的控制引出广义系统、输入/输出/系统、瞬态过程/稳态过程等相关概念。

**解** 机械工程控制是研究机械工程中广义的动力学问题。研究机械工程中的广义系统在一定外界条件（输入或激励，包括外加控制与外加干扰）作用下，从系统的初始状态出发，所经历的由其内部固有特性（即由系统的结构与参数所决定的特性）所决定的整个动态过程；研究这一系统及其输入、输出三者之间的动态关系。

从系统、输入、输出三者之间的关系出发，根据已知条件与求解问题的不同，机械工程控制论的任务可体现为五方面：

- (1) 已知系统、输入，求系统的输出，即系统分析问题；
  - (2) 已知系统和系统的理想输出，设计输入，即最优控制问题；
  - (3) 已知输入和理想输出，设计系统，即最优设计问题；
  - (4) 已知输出，确定系统，以识别输入或输入中的有关信息，此即滤波与预测问题；
  - (5) 已知系统的输入和输出，求系统的结构与参数，即系统辨识问题。
- 基于反馈原理，通过检测偏差再纠正偏差的系统称为闭环控制系统。通常闭环控制系统至少具有测量、比较和执行三个基本功能。检测控制量或输出量的实际值，实际值与给定值进行

比较后得出偏差值；用偏差值产生控制调节作用来消除偏差。

**题 1.2** 试举出 2 个日常生活中控制系统的例子，用框图说明其工作原理，并指出是开环控制系统或是闭环控制系统。

**【解析】** 要求理解机械工程控制的基本原理，理解开环控制系统和闭环控制系统的基本定义及在实际生活中的应用。

**解** (1) 在日常生活中有许多闭环系统，如电冰箱、电热水器等。其中在电热水器系统中，水箱的水温需要控制，即水箱为被控制量，或称为输出量，设为  $T_o(^{\circ}\text{C})$ ；输入量为用户希望的温度（给定值），设为  $T_i(^{\circ}\text{C})$ ；由于放出热水并注入冷水或水箱温度散热等原因而使水箱内水温下降为该系统的主要干扰。

当  $T_o(^{\circ}\text{C})=T_i(^{\circ}\text{C})$  时，水箱的实际水温经测温元件检测，并将实际水温转化成相应的电信号，与温控开关预先设定的信号进行比较而得到的偏差为零，此时电加热器不工作，水箱中的水温保持在希望的温度上。当使用热水并注入冷水时，水温下降，此时  $T_o(^{\circ}\text{C})<T_i(^{\circ}\text{C})$ ，则偏差不为零，使温控开关工作。于是电源接通，电加热器开始对水箱内的水进行加热，使水温上升，直到  $T_o(^{\circ}\text{C})=T_i(^{\circ}\text{C})$  时为止。系统控制框图如图 1-10 所示。

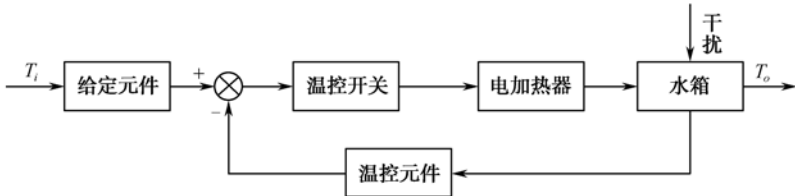


图 1-10 电热水器框图

(2) 在日常生活中，有许多开环控制系统，如全自动洗衣机等。对于全自动洗衣机，用户输入指令，机器按照用户选择的洗衣程序洗涤衣物。程序完成后，无论衣物是否干净，机器均停止。其框图如图 1-11 所示。

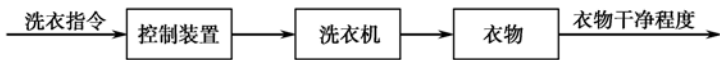


图 1-11 全自动洗衣机框图

**题 1.3** 对控制系统的基本性能要求有哪些，并说明为什么？

**【解析】** 掌握控制系统的基本性能要求，了解控制系统设计都是围绕基本性能要求而展开的。

**解** 对控制系统的基本要求是稳定性、准确性和快速系统性。

稳定性是保证系统正常工作的首要条件，是指系统动态过程的振荡倾向及其恢复平衡状态的能力。

准确性是衡量控制系统的性能重要指标，是指控制系统的控制精度，一般用稳态性能来衡量。快速性是指当输出量与输入量之间产生偏差时，系统消除这种偏差的快慢程度。

**题 1.4** 如图 1-12 所示是仓库大门自动控制系统原理示意图。试说明系统自动控制大门开、闭的工作原理，并画出系统框图。

**【解析】** 学会分析仓库大门控制系统的工作原理和系统框图的画法。加深对闭环反馈控制思想的理解。



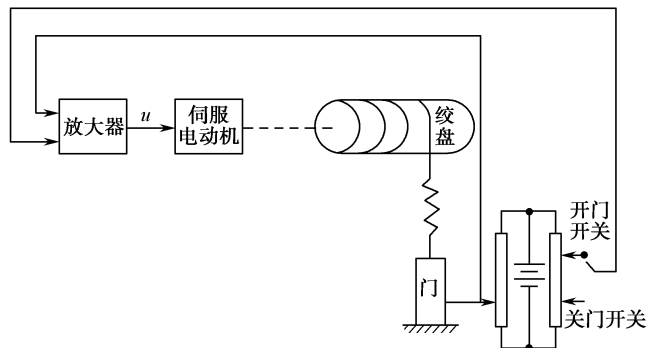


图 1-12 仓库大门自动开闭控制系统

**解** 开门开关合上时，电桥测量出开门位置与大门实际位置间对应的偏差电压，偏差电压经放大器放大后，驱动伺服电动机带动绞盘转动，将大门向上提起。与此同时，和大门连在一起的电刷也向上移动，直到桥式测量电路达到平衡，电动机停止转动，大门达到开启位置。反之，关门开关合上时，电动机带动绞盘使大门关闭，从而实现大门远距离开闭自动控制。仓库大门控制系统框图如图 1-13 所示。

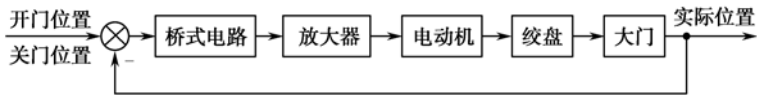


图 1-13 仓库大门控制系统框图

**题 1.5** 图 1-14 所示为工业炉温自动控制系统原理图。试分析系统的工作原理，指出被控对象、被控量和给定量，画出系统框图。

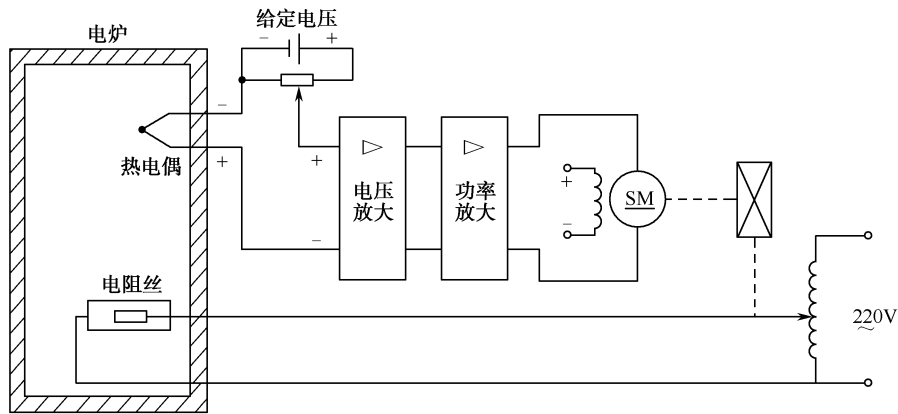


图 1-14 工业炉温自动控制系统原理图

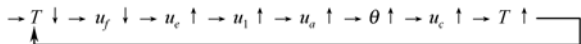
**【解析】** 学会分析炉温控制系统的基本原理和系统框图的画法。加深对闭环反馈控制思想的理解。

**解** 工作原理：加热炉采用电加热方式运行，加热器所产生的热量与调压器电压  $u_c$  的平方成正比， $u_c$  增高，炉温就上升。 $u_c$  的高低由调压器滑动触点的位置控制，该触点由可逆转的直流电动机驱动。炉子的实际温度用热电偶测量，输出电压  $u_f$ 。 $u_f$  作为系统的反馈电压与

给定电压  $u_r$  进行比较, 得到偏差电压  $u_e$ , 经电压放大器、功率放大器放大成  $u_a$  后, 作为控制电动机的电枢电压。

正常情况下, 炉温等于某个期望值  $T$ , 热电偶的输出电压  $u_f$  正好等于给定电压  $u_r$ 。此时,  $u_e = u_r - u_f = 0$ , 故  $u_1 = u_a = 0$ , 可逆电动机不转动, 调压器的滑动触点停留在某个合适的位置上, 使  $u_e$  保持一定的数值。这时, 炉子散失的热量正好等于从加热器吸取的热量, 形成稳定的热平衡状态, 温度保持恒定。

当炉膛温度  $T$  由于某种原因突然下降 (如炉门打开造成的热量流失), 则出现如下控制过程:



控制的结果是使炉膛温度回升, 直至  $T$  的实际值等于期望值为止。系统中, 加热炉是被控对象, 炉温是被控量, 给定量是由给定电位器设定的电压  $u_r$  (表征炉温的希望值)。炉温控制系统框图如图 1-15 所示。

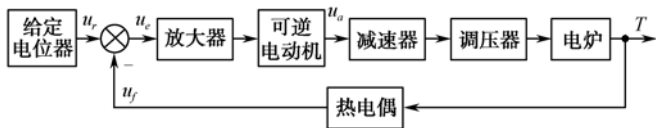


图 1-15 炉温控制系统框图

**题 1.6** 控制导弹发射架方位的电位器式随动系统原理图如图 1-16 所示。图中电位器  $P_1$ 、 $P_2$  并联后跨接到同一电源  $E_0$  的两端, 其滑臂分别与输入轴和输出轴相连接, 组成方位角的给定元件和测量反馈元件。输入轴由手轮操纵, 输出轴则由直流电动机经减速后带动, 电动机采用电枢控制的方式工作。试分析系统的工作原理, 指出系统的被控对象、被控量和给定量, 画出系统框图。

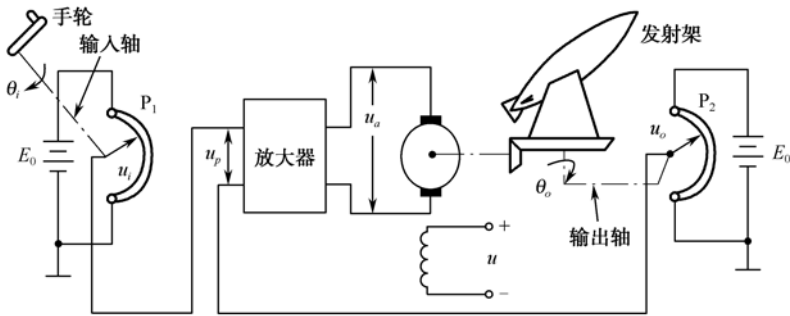


图 1-16 导弹发射架方位角控制系统原理图

**【解析】** 理解发射架方位角控制系统的工作原理, 根据导弹发射架方位角控制系统的基本原理画出系统框图。

**解** 当导弹发射架的方位角与输入轴方位角一致时, 系统处于相对静止状态。

当摇动手轮使电位器  $P_1$  的滑臂转过一个输入角  $\theta_i$  的瞬间, 由于输出轴的转角  $\theta_o \neq \theta_i$ , 于

是出现一个误差角  $\theta_e = \theta_i - \theta_o$ ，该误差角通过电位器  $P_1$ 、 $P_2$  转换成偏差电压  $u_e = u_i - u_o$ ， $u_e$  经放大后驱动电动机转动，在驱动导弹发射架转动的同时，通过输出轴带动电位器  $P_2$  的滑臂转过一定的角度  $\theta_o$ ，直至  $\theta_o = \theta_i$  时， $u_i = u_o$ ，偏差电压  $u_e = 0$ ，电动机停止转动。这时，导弹发射架停留在相应的方位角上。只要  $\theta_i \neq \theta_o$ ，偏差就会产生调节作用，控制的结果是消除偏差  $\theta_e$ ，使输出量  $\theta_o$  严格地跟随输入量  $\theta_i$  的变化而变化。

系统中，导弹发射架是被控对象，发射架方位角  $\theta_o$  是被控量，通过手轮输入的角度  $\theta_i$  是给定量。系统框图如图 1-17 所示。

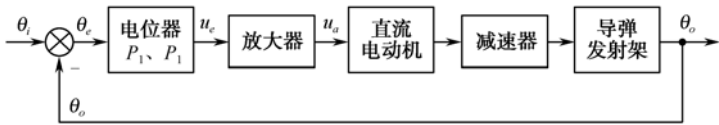


图 1-17 导弹发射架方位角控制系统框图

**题 1.7** 采用离心调速器的蒸汽机转速控制系统如图 1-18 所示。试指出系统中的被控对象、被控量和给定量，分析其工作原理，画出系统的框图。

**【解析】** 理解用离心调速器的蒸汽机转速控制系统的基本原理，根据离心调速器的蒸汽机转速控制系统的基本原理画出系统框图。

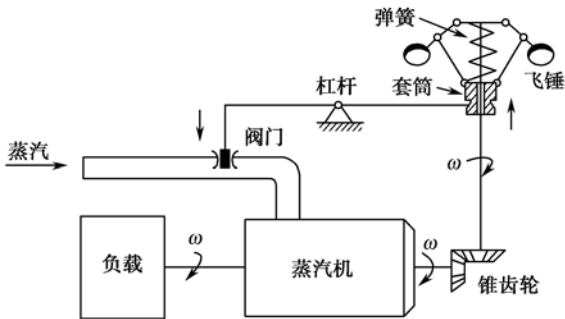


图 1-18 蒸汽机转速自动控制系统

**解** 工作原理：当蒸汽机带动负载转动的同时，通过锥齿轮带动一对飞锤做水平旋转。飞锤通过铰链可带动套筒上下滑动，套筒内装有平衡弹簧，套筒上下滑动时可拨动杠杆，杠杆另一端通过连杆调节供汽阀门的开度。在蒸汽机正常运行时，飞锤旋转所产生的离心力与弹簧的反弹力相平衡，套筒保持某个高度，使阀门处于一个平衡位置。如果由于负载增大使蒸汽机转速  $\omega$  下降，则飞锤因离心力减小而使套筒向下滑动，并通过杠杆增大供汽阀门的开度，从而使蒸汽机的转速回升。同理，如果由于负载减小使蒸汽机的转速  $\omega$  增加，则飞锤因离心力增加而使套筒上滑，并通过杠杆减小供汽阀门的开度，迫使蒸汽机转速回落。这样，离心调速器就能自动抵制负载变化对转速的影响，使蒸汽机的转速  $\omega$  保持在某个期望值附近。

在本系统中，蒸汽机是被控对象，蒸汽机的转速  $\omega$  是被控量，给定量是设定的蒸汽机希望转速。离心调速器感受转速大小并转换成套筒的位移量，经杠杆传调节供汽阀门，控制蒸汽机的转速，从而构成闭环控制系统。

系统框图如图 1-19 所示。

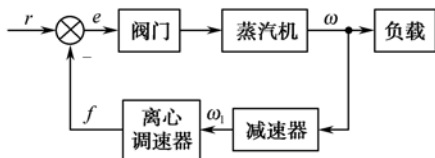


图 1-19 蒸汽机转速控制系统框图

**题 1.8** 摄像机角位置自动跟踪系统如图 1-20 所示。当光点显示器对准某个方向时, 摄像机会自动跟踪并对准这个方向。试分析系统的工作原理, 指出被控对象、被控量及给定量, 并画出系统框图。

**【解析】** 理解摄像机角位置自动跟踪系统的基本原理, 根据摄像机角位置自动跟踪系统的基本原理画出系统框图。

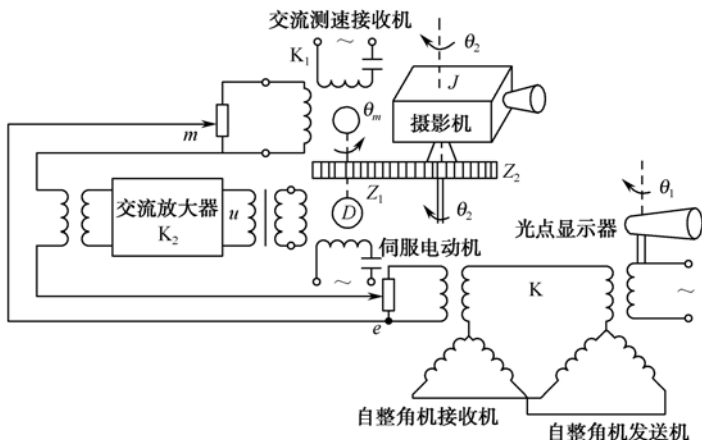


图 1-20 摄像机角位置随动系统原理图

**解** 控制系统的任务是使摄像机自动跟踪光点显示器指示的方向。

当摄像机方向角与光点显示器指示的方向一致时,  $\theta_2 = \theta_1$ , 自整角机输出  $e = 0$ , 交流放大器输出电压  $u = 0$ , 电动机静止, 摄像机保持原来的协调方向。当光点显示器转过一个角度,  $\theta_2 \neq \theta_1$  时, 自整角机输出与失谐角  $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$  成比例的电压信号 (其大小、极性反映了失谐角的幅值和方向), 经电位器后变成  $e$ , 经放大器放大后驱动伺服电动机旋转, 并通过减速器带动摄像机跟踪光点显示器的指向, 使偏差减小, 直到摄像机与光点显示器指向重新达到一致为止。测速发电机测量电动机转速, 进行速度反馈, 用于改善系统性能。

系统中, 摄像机是被控对象, 摄像机的方向角  $\theta_2$  是被控量, 给定量是光点显示器指示的方向角  $\theta_1$ 。系统框图如图 1-21 所示。

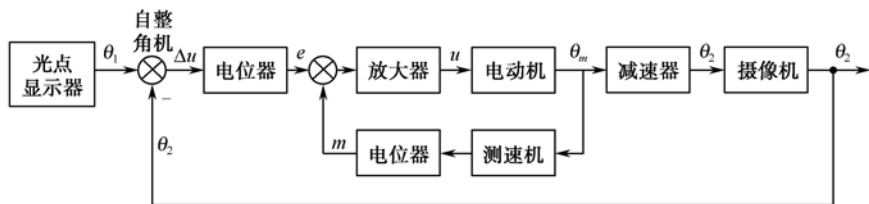


图 1-21 摄像机角位置随动系统框图

**题 1.9** 如图 1-22 所示为水温控制系统示意图。冷水在热交换器中由通入的蒸汽加热，从而得到一定温度的热水。冷水流量变化用流量计测量。试绘制系统框图，并说明为保持热水温度为期望值，系统是如何工作的？系统的被控对象和控制装置是什么？

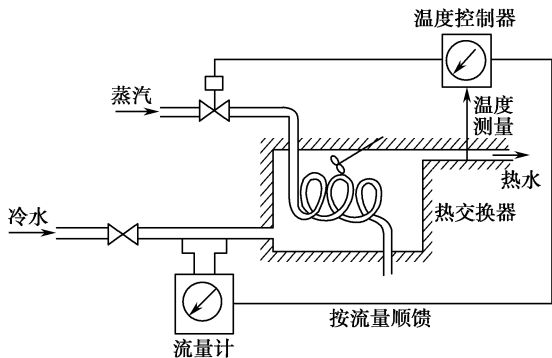


图 1-22 水温控制系统原理图

**【解析】**理解水温控制跟踪系统的基本原理，根据水温控制系统的基本原理画出系统框图。

**解** 工作原理：这是一个按干扰补偿的复合控制系统。温度传感器不断测量交换器出口处的实际水温，并在温度控制器中与给定温度相比较，若低于给定温度，其偏差值使蒸汽阀门开大，进入热交换器的蒸汽量加大，热水温度升高，直至偏差为零。如果由于某种原因，冷水流量加大，则流量值由流量计测得，通过温度控制器，开大阀门，使蒸汽量增加，提前进行控制，实现按冷水流量进行顺馈补偿，保证热交换器出口的水温不发生大的波动。

其中，热交换器是被控对象，实际热水温度为被控量，给定量（希望温度）在控制器中设定；冷水流量是干扰量。水温控制系统框图如图 1-23 所示。

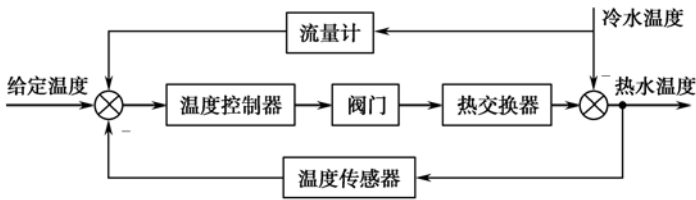


图 1-23 水温控制系统框图

**题 1.10** 许多机器，像车床、铣床和磨床，都配有跟随器，用于复制模板的外形。图 1-24 就是这样一种跟随系统的原理图。在此系统中，刀具能在原料上复制模板的外形。试说明其工作原理，画出系统框图。

**【解析】**理解跟随系统的基本原理，根据跟随系统的基本原理画出系统框图。

**解** 工作原理：模板与原料同时固定在工作台上。X、Y 轴直流伺服电动机接收控制器的指令，按输入命令带动工作台做 X、Y 方向运动。模板随工作台移动时，触针会在模板表面滑动，跟随刀具中的位移传感器将触针感应到的反映模板表面形状的位移信号送到跟随控制器中，控制器的输出驱动 Z 轴直流伺服电动机带动切削刀具连同刀具架跟随触针运动，当刀具位置与触针位置一致时，两者位置偏差为零，Z 轴伺服电动机停止。

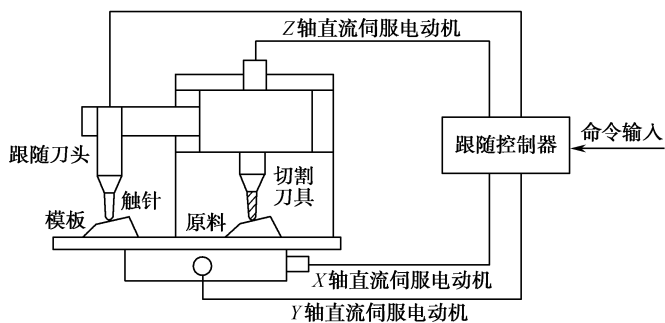


图 1-24 跟随系统原理图

系统中，刀具是被控对象，刀具位置是被控量，给定量是由模板确定的触针位置。跟随系统框图如图 1-25 所示。最终原料被切割加工成模板的形状。

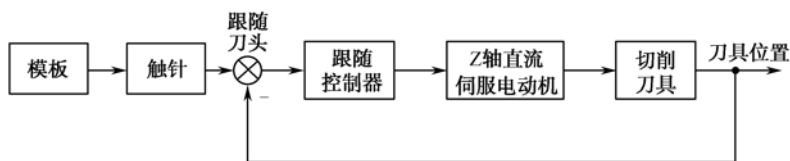


图 1-25 跟随系统框图

# 第2章 控制系统的数学模型

## 2.1 基本要求及重难点

### 基本要求

- 熟悉系统数学模型概念及表示方法，学会物理系统数学模型建立的基本过程；
- 了解数学模型概念，能够运用动力学、电学及相关专业知识列写系统微分方程；
- 掌握传递函数的概念、特点，会求传递函数的零点、极点及放大系数；
- 能够用解析法求系统的传递函数；
- 掌握典型环节传递函数的基本形式及相关参数的物理意义；
- 了解传递函数框图的组成及意义，能根据系统微分方程绘制系统传递函数框图并简化，从而求出系统传递函数；
- 掌握闭环系统中前向通道传递函数、开环传递函数、闭环传递函数的定义及求法，掌握干扰作用下系统的输出及传递函数的求法和特点；
- 了解相似原理的概念；
- 了解系统的状态空间表示法。

### 教学重点

- 物理系统的数学模型；
- 传递函数的概念、特点及求法，典型环节的传递函数；
- 传递函数框图的绘制及简化。

### 教学难点

- 物理系统微分方程的建立；
- 控制系统职能框图到传递函数框图的转化。

## 2.2 本章学习指导

### 2.2.1 系统的数学模型与微分方程

#### 1. 控制系统的数学模型

系统的数学模型是描述系统输入/输出变量之间以及内部各变量之间相互关系的数学表达

式。系统数学模型揭示了系统结构、参数及性能之间的内在关系。控制系统数学模型既是分析系统的基础，又是综合设计控制系统的依据。

在经典控制理论中，常用的数学模型是微分方程、差分方程、传递函数、结构图及信号流程图等；在现代控制理论中，采用的是状态空间表达式和状态变量图。

建立控制系统数学模型的方法主要有分析法和实验法。分析法是对系统各部分的运动机理进行分析，根据系统和元件所遵循的有关定律分别推导出数学表达式，从而建立系统的数学模型。实验法是人为地给系统施加某种测试信号，记录其输出响应，根据实验数据进行整理，并用适当的数学模型去逼近，拟合出比较接近实际系统的数学模型，这种方法也叫系统辨识。往往只有部分系统的数学模型由简单环节组成，才能根据机理分析解析推导而成。生产中相当多的系统，特别是复杂系统，涉及的因素较多时，往往需要通过实验方法去建立数学模型。

本章研究的重点是用解析法建立系统的数学模型。

## 2. 系统数学模型的形式

由于数学模型中变量的选取不同，用于描述系统数学模型的形式也是多种多样的。

描述各变量之间关系的代数方程叫系统的静态数学模型，描述系统各变量动态关系的表达式称为动态数学模型。时域中常采用微分方程形式，对离散系统用差分方程；在现代控制理论中对多变量输入输出系统用状态空间方程。本章主要讨论系统的动态数学模型。

在复数域常采用传递函数和框图形式；在频率域常采用频率特性的形式。系统各种数学模型形式建立和转换的数学基础是拉普拉斯变换和傅里叶变换。

系统的数学模型能用线性微分方程来描述时，该系统为线性系统。如果线性微分方程的各系数均为常数，则该系统称为线性定常系统。若考虑系统的非线性因素，这时系统的数学模型就只能用非线性微分方程来描述，所对应的系统称为非线性系统。

线性系统可以运用叠加原理，当有几个输入量同时作用于系统时，可以逐个输入，求出对应的输出，然后根据线性叠加原理把各个输出进行叠加，即可求出系统的总输出，这对于生产中大量的多变量输入/输出线性系统的分析和设计十分有用。非线性系统不能应用叠加原理。

## 3. 微分方程

在时域中，微分方程是控制系统最基本的数学模型，是列写传递函数和状态空间方程的基础。

用解析法列写微分方程的一般步骤如下：

- (1) 确定系统或各组成元件的输入/输出变量，找出系统或各物理量（变量）之间的关系。
- (2) 按照信号在系统中的传递顺序，从系统的输入端开始，根据各变量遵循的运动规律或物理定律，列出信号在传递过程中各环节的动态微分方程，一般为一个微分方程组。
- (3) 按照系统的工作条件，忽略次要因素，对已建立的原始动态微分方程进行数学处理，如对非线性项进行线性化处理等，并考虑相邻元件之间是否存在负载效应。
- (4) 消除所列动态微分方程的中间变量，得到描述系统输入/输出变量之间的微分方程。

控制系统微分方程的一般形式如下：

用解析法建立系统微分方程后，通常还需要将微分方程标准化（规格化）。即把与输出量有关的各项放在微分方程等号的左边，与输入量有关的各项放在微分方程等号的右边，并且各



阶导数按降幂排列。设输入为  $x_i(t)$ , 输出为  $x_o(t)$ , 系统微分方程的一般形式可表达为

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n x_o(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_o(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx_o(t)}{dt} + a_0 x_o(t) \\ = b_m \frac{d^m x_i(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x_i(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx_i(t)}{dt} + b_0 x_i(t) \quad (n \geq m) \end{aligned} \quad (2-1)$$

由于系统中通常存在储能元件而使系统具有惯性, 所以输出量的阶次  $n$  一般大于或等于输入量的阶次  $m$ 。

## 2.2.2 系统分析的基本数学工具——传递函数

### 1. 传递函数

线性定常系统的传递函数, 定义为零初始条件下, 系统输出变量的拉普拉斯变换与输入变量的拉普拉斯变换之比。零初始条件为:  $t < 0$  时, 输入量及其各阶导数均为零; 输入量施加于系统之前, 系统处于稳定工作状态, 即  $t < 0$  时, 输出量及其各阶导数  $x_o(0_-)$ ,  $x_o'(0_-)$ ,  $\cdots$ ,  $x_o^{(n-1)}(0_-)$  均为零。

在零初始条件下, 对式 (2-1) 进行拉普拉斯变换, 求出输入量和输出量的象函数, 可得:

$$\begin{aligned} a_n s^n X_o(s) + a_{n-1} s^{n-1} X_o(s) + \cdots + a_1 s X_o(s) + a_0 X_o(s) \\ = b_m s^m X_i(s) + b_{m-1} s^{m-1} X_i(s) + \cdots + b_1 s X_i(s) + b_0 X_i(s) \end{aligned}$$

系统传递函数的一般形式为

$$G(s) = \frac{L[x_o(t)]}{L[x_i(t)]} = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (2-2)$$

传递函数具有如下主要特点:

(1) 传递函数是  $s$  的复变函数。传递函数中的各项系数和相应微分方程中的各项系数对应相等, 完全取决于系统的结构和参数。

(2) 传递函数分母的阶次与各项系数只取决于系统本身的固有特性, 而与外界无关, 分子的阶次与各项系数取决于系统与外界之间的关联。

(3) 传递函数分母中  $s$  的阶次  $n$  不会小于分子中  $s$  的阶次  $m$ , 即  $n \geq m$ 。这是由于实际系统中总是存在储能元件具有惯性, 使输出滞后于输入。

(4) 传递函数可以有量纲, 也可以是无量纲的, 取决于系统输出的量纲与输入的量纲。

(5) 物理性质不同的系统、环节或元件, 可以具有相同类型的传递函数。因此, 传递函数的分析方法可以用于不同的物理系统。

(6) 传递函数是一种以系统参数表示的线性定常系统输入量与输出量之间的关系式, 传递函数的概念通常只适用于线性定常系统。

### 2. 系统的特征方程、零点和极点及复域特征

系统的传递函数  $G(s)$  是复变量  $s$  的函数, 经因式分解后, 可写成如下形式:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \\ &= \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \end{aligned}$$

(2-3)

- (1) 特征多项式: 传递函数分母的多项式  $a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$  , 反映系统的固有特性。
- (2) 特征方程:  $a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0 = 0$  。
- (3) 特征根: 特征方程的解。
- (4) 零点: 当  $s = z_j (j=1,2,\cdots,m)$  均能使  $G(s) = 0$  , 称  $z_1, z_2, \cdots, z_m$  为系统的零点。
- (5) 极点: 当  $s = p_i (i=1,2,\cdots,n)$  时, 均能使  $G(s)$  取极值, 即  $\lim_{s \rightarrow p_i} G(s) = \infty$  , 故称  $p_1, p_2, \cdots, p_n$  为  $G(s)$  的极点。系统传递函数的极点也就是系统特征方程的特征根。

系统传递函数的零点、极点和放大倍数  $K$  对系统的分析研究非常重要。系统极点的性质决定系统是否稳定。当系统的输入信号一定时, 系统的零、极点决定着系统的动态性能, 系统的稳态性能由传递函数的常数项决定。

3. 典型环节的传递函数

一个复杂的控制系统总可以分解为有限简单因式的组合, 这些简单因式可以构成独立的控制单元, 并具有各自独立的动态特性, 通常称这些简单因式构成的控制单元为典型环节。线性系统的典型环节有: 比例环节、惯性环节、积分环节、微分环节、振荡环节和延时环节等, 见表 2-1。

表 2-1 典型环节的传递函数

环 节	动力学方程	传 递 函 数
比例环节	$x_o(t) = Kx_i(t)$	$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = K$ $K$ 为放大系数或增益
惯性环节	$T \frac{dx_o(t)}{dt} + x_o(t) = x_i(t)$	$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$ $T$ 为惯性环节的时间常数
微分环节	$x_o(t) = T \frac{dx_i(t)}{dt}$	$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = Ts$ $T$ 为微分环节的时间常数; 微分环节不可能单独存在; 作用: 使系统的输出提前, 增加系统阻尼, 强化噪声的作用
积分环节	$x_o(t) = \frac{1}{T} \int x_i(t) dt$	$G(s) = \frac{x_o(s)}{x_i(s)} = \frac{1}{Ts}$ $T$ 为积分环节的时间常数; 积分环节是输出量对输入量时间的积累
振荡环节	$T^2 \frac{d^2x_o(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dx_o(t)}{dt} + x_o(t) = x_i(t)$	$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{1}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_ns + \omega_n^2}$ $T$ 为振荡环节的时间常数, $\omega_n$ 为无阻尼固有频率, $\xi$ 为阻尼比
延时环节	$x_o(t) = x_i(t - \tau)$	$G(s) = \frac{L[x_o(t)]}{L[x_i(t)]} = e^{-\tau s}$ $\tau$ 为延时时间

4. 延时环节、惯性环节和间歇的区别

惯性环节的输出需要延迟一段时间才接近于所要求的输出量,但它从输入开始时刻起就有了输出。而延时环节在输入开始之初的时间 $\tau$ 内并无输出,在时间 $\tau$ 后才开始有输出,且输出就完全等于开始的输入,不再有其他滞后过程。即输出量 $x_o(t)$ 等于输入量 $x_i(t)$ ,只是在时间上延迟了一段时间间隔 $\tau$ 。

在机械传动副(如齿轮副、丝杠螺母副等)中的间歇是典型的所谓死区的非线性环节。与延时环节相同之处是在输入开始一段时间后才输出;而它们的输出有很大的不同:延时环节的输出完全等于从一开始起的输入,而死区的输出只反映同一时间的输入的作用,系统对死区段的输入作用,其输出无任何反映。

5. 负载效应

负载效应是物理环节之间的信息作用,相邻环节的串联有功率传输或能量转换即存在负载效应。

传递函数的环节不一定代表一个具体的物理元件(物理环节或子系统),一个具体的物理元件(物理环节或子系统)也不一定就是一个传递函数环节。从根本上讲,这取决于组成系统的各物理元件(物理环节或子系统)之间是否有负载效应,即各物理元件(物理环节或子系统)之间的功率传输或能量转换关系。只有当后一环节输入阻抗很大,对前面环节的输出的影响可以忽略时,才可以单独地分别列写每个环节的微分方程。

分析和设计系统时,要认真区分表示系统结构的物理框图与分析系统的传递函数框图,不要不加分析地将物理框图中的每个物理元件(物理环节或子系统)本身的传递函数代入物理框图所对应的框中,并将整个框图作为传递函数框图进行数学分析,这样将造成没有考虑各物理元件(物理系统或子系统)之间负载效应的错误。

6. 相似原理

不同的物理系统(环节)可用形式相同的微分方程或传递函数来描述。一般称能用形式相同的数学模型来描述的物理系统(环节)为相似系统(环节),称在数学模型中占相同位置的物理量为相似量。由于相似系统(环节)的数学模型在形式上相同,所以可以用相同的数学方法对相似系统进行研究,可以通过一种物理系统去研究另一种相似的物理系统。

表 2-2 列出了在机械-电气中的相似变量。

表 2-2 机械-电气中的相似变量

机械(直线运动系统)	机械(旋转运动系统)	电 气 系 统
力 ( $F$ )	力矩 ( $T$ )	电压 ( $u$ )
质量 ( $M$ )	转动惯量 ( $J$ )	电感 ( $L$ )
黏性摩擦系数 ( $f$ )	黏性摩擦系数 ( $f$ )	电阻 ( $R$ )
弹簧刚度 ( $K$ )	扭转弹簧刚度 ( $K$ )	电容的倒数 ( $1/C$ )
位移 ( $x$ )	角位移 ( $\theta$ )	电量 ( $q$ )
速度 ( $v$ )	角速度 ( $\omega$ )	电流 ( $I$ )

7. 传递函数框图

系统传递函数框图是控制系统数学模型的图解表示法，具体而形象地表示了系统内部各环节的数学模型、各变量之间的相互关系以及信号的流向，并可揭示和评价每个组成环节对系统的影响；利用框图简化可以列写整个系统的数学表达式形式的传递函数；系统框图还可以转化成系统的频率特性，便于在频域对系统进行分析 and 研究。

系统传递函数框图的构成由函数方框、相加点、分支点和信号箭头线所组成，如图 2-1 所示。

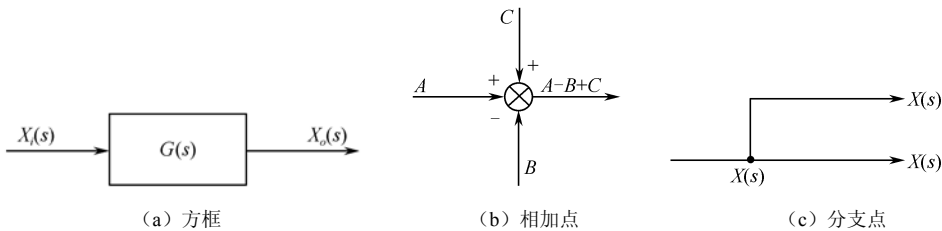


图 2-1 传递函数框图的构成要素

- 建立系统框图的一般步骤如下：
- (1) 根据系统工作原理和特性将系统划分为若干个环节，注意各环节之间不能有负载效应；
  - (2) 建立各环节的原始微分方程；
  - (3) 对原始微分方程进行拉普拉斯变换，分别建立其环节的传递函数，画出相应的框图；
  - (4) 按照信号在系统中的传递、变换关系，依次将各环节的传递函数框图连接，便可得到整个系统的传递函数框图。

框图的连接方式主要有串联、并联和反馈连接，见表 2-3。

表 2-3 框图连接方式

连接方式	连接示意图	等效传递函数	$n$ 个环节连接
串联		$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = G_1(s)G_2(s)$	$G(s) = \prod_{i=1}^n G_i(s)$
并联		$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = G_1(s) + G_2(s)$	$G(s) = \sum_{i=1}^n G_i(s)$
反馈		$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}$	

8. 框图的等效变换

很多实际系统通常要用多回路的框图来表示，大环回路套小环回路，其框图显得很复杂。在对系统进行分析时，需要对框图做一定的变换、组合与化简，以便求出总的传递函数。这里的变换主要是指某些框图进行位置上的变换；增加或取消一些框图，通过分支点或相加点的移动来消除各种连接方式之间的交叉，然后再进行等效变换化简。所谓等效变换，是指变换前后输入/输出总的数学关系保持不变。

1) 分支点移动规则

分支点：同一信号由一节点分开向不同方向传递的点。分支点可以相对于方框做前移或后移。

分支点前移：若分支点由方框之后移到方框之前，为保持等效，必须在分支回路上串入具有相同函数的方框。

分支点后移：若分支点由方框之前移到方框之后，为保持等效，必须在分支回路上串入具有相同函数倒数的方框。

2) 相加点移动规则

相加点：信号在该节点进行代数和运算的点。相加点可以相对于方框做前移或后移。

相加点前移：若相加点由方框之后移到方框之前，为保持等效，必须在分支回路上串入具有相同函数的倒数的方框。

相加点后移：若相加点由方框之前移到方框之后，为保持等效，必须在分支回路上串入具有相同函数的方框。

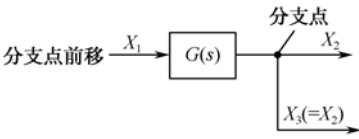
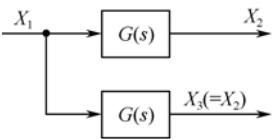
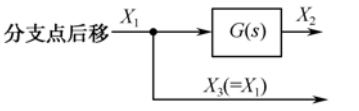
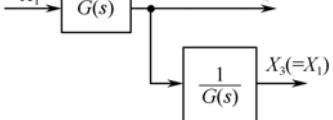
3) 分支点之间、相加点之间相互移动规则

分支点之间、相加点之间的相互移动，均不改变原有的数学关系，因此，可以相互移动；但分支点和相加点之间不能互相移动，因为它们并不等效。

需要指出的是，框图的化简途径并不是唯一的。系统中有多个分支点或相加点时，究竟该移动哪一个分支点或相加点？这并没有确切的定式，只要移动前后系统等效即可，力求方便简单。

框图等效变换见表 2-4。

表 2-4 框图等效变换

变 换	原 框 图	等 效 框 图
分支点前移		
分支点后移		

续表

变 换	原 框 图	等 效 框 图
相加点前移		
相加点后移		
消去反馈回路		
分支点互移		
相加点互移		

9. 闭环传递函数的直接列写

含有多个局部反馈回路的闭环传递函数也可以直接由下式求取：

$$G(s) = \frac{\text{前向通道的传递函数之积}}{1 + \sum (\text{每一反馈环的传递函数之积})}$$

(2-4)

在应用式（2-4）时，必须同时具备如下两个条件：

（1）整个系统框图仅有一条前向通道。如果系统有多条前向通道，则应先采用并联方式合并为一条前向通道。

（2）各局部反馈回路之间存在公共的传递函数方框。

如果系统有两个独立的局部反馈回路，其间没有公共的方框，直接利用式（2-4）会出现错误的传递函数。

10. 输入和干扰同时作用下的系统传递函数

一个考虑扰动  $N(s)$  的反馈控制系统的典型结构如图 2-2 所示。

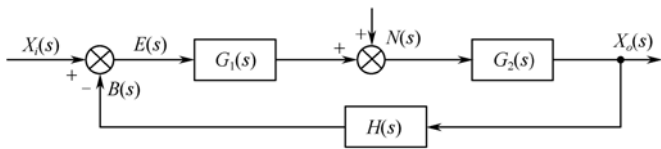


图 2-2 考虑扰动的反馈控制系统的典型框图

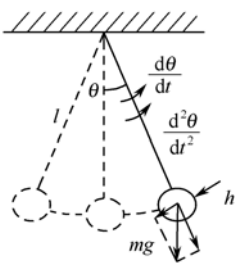
表 2-5 输入和干扰同时作用下的系统输出

输入作用	系统输出	说明
$X_i(s)$ 作用下的输出	$X_{o1}(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} X_i(s)$	在给定输入 $X_i(s)$ 作用下的输出 $X_{o1}(s)$ 只取决于系统的闭环传递函数和给定的输入 $X_i(s)$ 的形式
$N(s)$ 作用下的输出	$X_{o2}(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s)$	
总输出	$X_o(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} [G_1(s)X_i(s) + N(s)]$	闭环系统能使干扰 $N(s)$ 引起的输出 $X_{o2}(s)$ 很小

通过反馈回路组成的闭环系统能使输出  $X_o(s)$  只随  $X_i(s)$  而变化，不管外来干扰  $N(s)$  如何变化， $X_o(s)$  总是保持不变或变化很小。闭环反馈系统能有效地抑制干扰对系统的影响，这是闭环控制能获得很高控制精度的一个重要原因。如果系统没有反馈回路，即  $H(s)=0$ ，则系统成为一个开环系统，此时，干扰  $N(s)$  引起的输出  $X_{o2}(s) = G_2(s)N(s)$  将无法消除，全部形成误差从系统输出。

2.3 例题题解

例 2.1 已知单摆系统的运动如图 2-3 所示。试写出运动方程式；求取线性微分方程。  
解 （1）设输入外作用力为零，输出为摆角  $\theta$ ，摆球质量为  $m$ 。由牛顿定律写出：



$$m(l \frac{d^2 \theta}{dt^2}) = -mg \sin \theta - h$$

式中， $l$  为摆长； $l\theta$  为运动弧长； $h$  为空气阻力。  
（2）写中间变量关系式：

$$h = \alpha(l \frac{d \theta}{dt})$$

式中， $\alpha$  为空气阻力系数； $l \frac{d \theta}{dt}$  为运动线速度。

图 2-3 单摆系统的运动

（3）消中间变量得运动方程式：

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \alpha l \frac{d \theta}{dt} + mg \sin \theta = 0$$

此方程为二阶非线性齐次方程。

（4）线性化：由前可知，在  $\theta=0^\circ$  附近，非线性函数  $\sin \theta \approx \theta$ ，故代入上式可得线性化方程：

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} + al \frac{d\theta}{dt} + mg\theta = 0$$

**例 2.2** 如图 2-4 所示为一闭环调速控制系统原理图。试建立以  $u_g(t)$  为输入、 $n(t)$  为输出的微分方程式，并求闭环系统的传递函数。

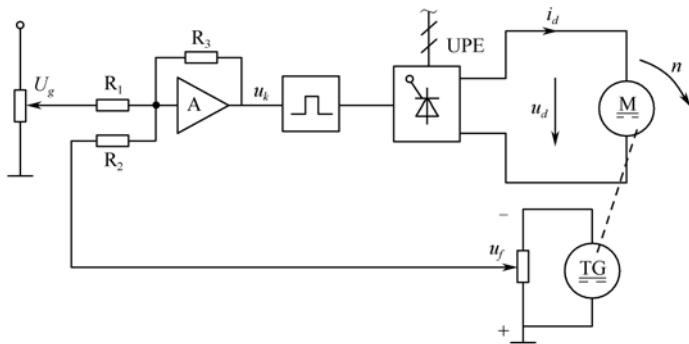


图 2-4 闭环调速控制系统原理图

**解** 系统各环节的输入/输出微分方程如下。

运算放大器 A:  $u_k = \frac{R_3}{R_1}(U_g - u_f) = K_1(U_g - u_f)$

可控电源 UPE:  $u_d = K_s u_k$

直流电动机 M:  $T_d T_m \frac{d^2 n}{dt^2} + T_m \frac{dn}{dt} + n = \frac{u_d}{C_e}$

测速发电机 TG:  $u_f = K_f n$

上述各式中， $K_1$  为运算放大器的放大倍数； $K_s$  为可控电源的比例放大倍数； $T_d$  与  $T_m$  分别为电动机的电磁时间常数和机电时间常数； $C_e$  为电动机的电动势常数； $K_f$  为测速发电机的比例转换系数。将上述各式消去中间变量，可得系统的微分方程为

$$\frac{T_d T_m}{1 + K_k} \frac{d^2 n}{dt^2} + \frac{T_m}{1 + K_k} \frac{dn}{dt} + n = \frac{K_r}{(1 + K_k) C_e} U_g$$

式中， $K_r = K_1 K_s$  为前向通道电压放大倍数； $K_k = \frac{K_1 K_s K_f}{C_e}$  为系统的开环放大倍数。

对上述各环节微分方程取拉普拉斯变换，得到系统各环节的复域形式方程

$$U_k(s) = K_1 [U_g(s) - U_f(s)]$$

$$U_d(s) = K_s U_k(s)$$

$$(T_d T_m s^2 + T_m s + 1) N(s) = \frac{U_d(s)}{C_e}$$

$$U_f(s) = K_f N(s)$$



系统的传递函数框图如图 2-5 所示。

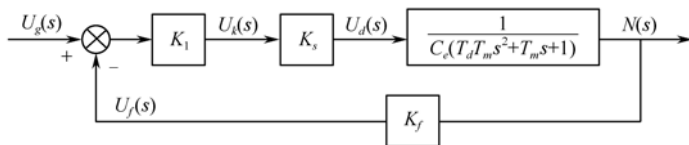


图 2-5 系统传递函数框图

系统闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{N(s)}{U_g(s)} = \frac{K_1 K_s}{C_e(T_d T_m s^2 + T_m s + 1) + K_1 K_f K_s}$$

**例 2.3** 写出图 2-6 所示机械系统的运动微分方程式。图中，外力  $f(t)$  为输入，位移  $x_2$  为输出。

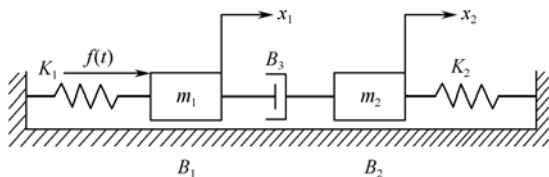


图 2-6 机械系统

**解** 对于图示系统，设  $f_{B_1}$ 、 $f_{B_2}$ 、 $f_{B_3}$  为阻尼力， $f_{K_1}$ 、 $f_{K_2}$  为弹簧作用力。按牛顿定律列写力学方程：

$$f(t) - f_{B_1} - f_{K_1} - f_{B_3} = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} \quad (1)$$

$$f_{B_3} - f_{K_2} - f_{B_2} = m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} \quad (2)$$

$$f_{B_3} = B_3 \frac{d(x_1 - x_2)}{dt} \quad (3)$$

将式 (3) 代入式 (1)、式 (2)，得：

$$f(t) - B_1 \frac{dx_1}{dt} - K_1 x_1 - B_3 \frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} \quad (4)$$

$$B_3 \frac{d(x_1 - x_2)}{dt} - K_2 x_2 - B_2 \frac{dx_2}{dt} = m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} \quad (5)$$

对式 (4)、式 (5) 进行拉普拉斯变换：

$$F(s) - B_1 s X_1(s) - K_1 X_1(s) - B_3 s [X_1(s) - X_2(s)] = m_1 s^2 X_1(s)$$

$$\text{即} \quad F(s) + B_3 s X_2(s) = (B_1 s + K_1 + B_3 s + m_1 s^2) X_1(s) \quad (6)$$

$$B_3 s [X_1(s) - X_2(s)] - K_2 X_2(s) - B_2 s X_2(s) = m_2 s^2 X_2(s)$$

$$\text{即} \quad X_1(s) = \frac{B_3s + K_2 + B_2s + m_2s^2}{B_3s} X_2(s) \quad (7)$$

将式 (7) 代入式 (6), 得:

$$F(s) + B_3sX_2(s) = (B_1s + K_1 + B_3s + m_1s^2) \frac{B_3s + K_2 + B_2s + m_2s^2}{B_3s} X_2(s)$$

整理得微分方程如下:

$$\begin{aligned} m_1m_2 \frac{d^4x_2}{dt^4} + (B_1m_2 + B_2m_1 + B_3m_2 + B_3m_1) \frac{d^3x_2}{dt^3} + (B_1B_3 + B_1B_2 + B_2B_3 + K_1m_2 + m_1K_2) \frac{d^2x_2}{dt^2} \\ + (K_1B_2 + K_1B_3 + K_2B_1 + K_2B_3) \frac{dx_2}{dt} + K_1K_2x_2 = B_3 \frac{df}{dt} \end{aligned}$$

**例 2.4** RC 网络如图 2-7 所示, 其中  $u_1$  为网络输入量,  $u_2$  为网络输出量。画出网络结构图; 求传递函数  $U_2(s)/U_1(s)$ 。

**解** 用复阻抗写出原始方程组, 并整理成因果关系式。

$$\text{输入回路: } U_1 = R_1I_1 + (I_1 + I_2) \frac{1}{C_2s}, \quad I_1 = \frac{1}{R_1} \left[ U_1 - (I_1 + I_2) \frac{1}{C_2s} \right]$$

$$\text{输出回路: } U_2 = R_2I_2 + (I_1 + I_2) \frac{1}{C_2s}, \quad I_2 = I_1 R_1 \left[ \frac{C_1s}{R_2C_1s + 1} \right]$$

$$\text{中间回路: } I_1R_1 = (R_2 + \frac{1}{C_1s}) \cdot I_2, \quad U_2 = R_2I_2 + (I_1 + I_2) \frac{1}{C_2s}$$

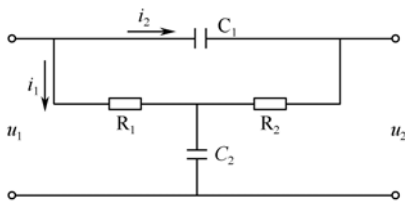


图 2-7 RC 网络

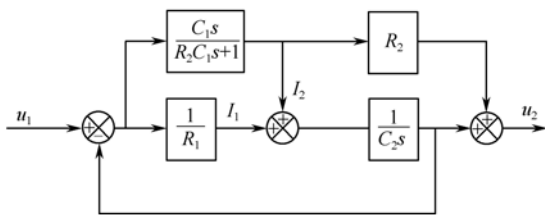


图 2-8 传递函数框图

即可画出传递函数, 如图 2-8 所示。

化简框图即可求出其传递函数:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R_1R_2C_1C_2s^2 + (R_1 + R_2)C_1s + 1}{R_1R_2C_1C_2s^2 + (R_1C_2 + R_2C_1 + R_1C_1)s + 1}$$

**例 2.5** 设有一个倒立摆安装在电动机传动车上, 如图 2-9 所示。倒立摆是不稳定的, 如果没有适当的控制力作用在它上面, 它将随时可能向任何方向倾倒。这里只考虑二维问题, 即认为倒立摆只在平面内运动。控制力  $u$  作用于小车上, 假设摆杆的重心位于其几何中心  $A$ 。试求该系统的运动方程式。

**解** 设输入为作用力  $u$ ，输出为摆角  $\theta$ 。写原始方程式，设摆杆重心  $A$  的坐标为  $(X_A, y_A)$  于是  $X_A = X + l \sin \theta$ ,  $Y_A = l \cos \theta$ 。

增设中间受力变量  $V$ 、 $H$ 、 $X$ ，画出系统隔离体受力图如图 2-10 所示。摆杆围绕重心  $A$  点转动方程为

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = Vl \sin \theta - Hl \cos \theta \quad (1)$$

式中， $J$  为摆杆围绕重心  $A$  的转动惯量。摆杆重心  $A$  沿  $x$  轴方向运动方程为

$$m \frac{d^2 x_A}{dt^2} = H \quad \text{即} \quad m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \theta) = H \quad (2)$$

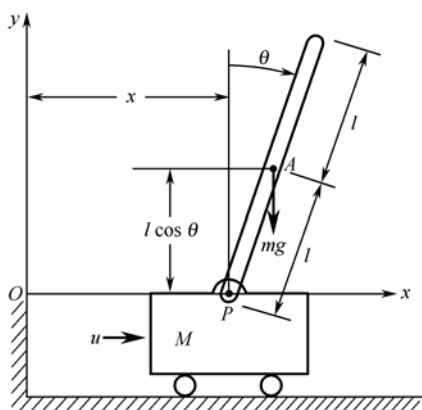


图 2-9 倒立摆示意图

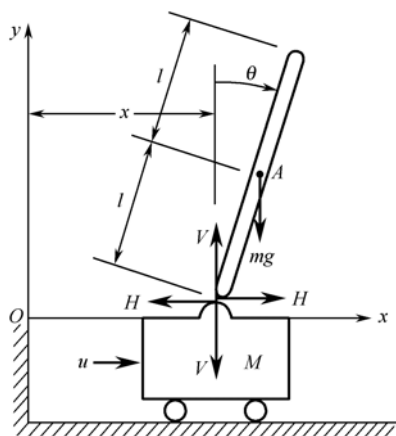


图 2-10 隔离体受力图

摆杆重心  $A$  沿  $y$  轴方向运动方程为

$$m \frac{d^2 y_A}{dt^2} = V - mg \quad \text{即} \quad m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) = V - mg$$

小车沿  $x$  轴方向运动方程为  $M \frac{d^2 x}{dt^2} = u - H$

摆杆重心  $A$  沿  $X$  轴和  $Y$  轴方向运动方程为车载倒立摆系统运动方程组。因为含有  $\sin \theta$  和  $\cos \theta$  项，所以为非线性微分方程组。当  $\theta$  很小时，可对方程组线性化， $\sin \theta \approx \theta$ ,  $\cos \theta \approx 1$ ，则倒立摆系统运动方程组可用线性化方程表示为

$$\begin{cases} J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = Vl \theta - Hl \\ m \frac{d^2 x}{dt^2} + ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = H \\ 0 = V - mg \\ M \frac{d^2 x}{dt^2} = u - H \end{cases}$$

用  $s^2 = \frac{d^2}{dt^2}$  的算子符号将以上方程组写成代数形式，消掉中间变量  $V$ 、 $H$ 、 $X$  得：

$$(-Ml - \frac{M+m}{ml}J)s^2\theta + (M+m)g\theta = u$$

将微分算子还原后得:

$$(Ml + \frac{MJ}{ml} + \frac{J}{l})\frac{d^2\theta}{dt^2} - (M+m)g\frac{d\theta}{dt} = -u$$

此为二阶线性化偏量微分方程。

**例 2.6** 已知机械系统如图 2-11 所示, 电气系统如图 2-12 所示, 试画出两系统结构图, 并求出传递函数, 证明它们是相似系统。

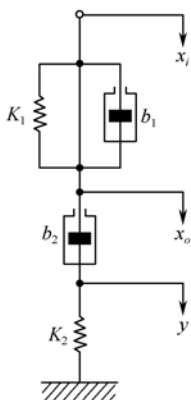


图 2-11 机械系统

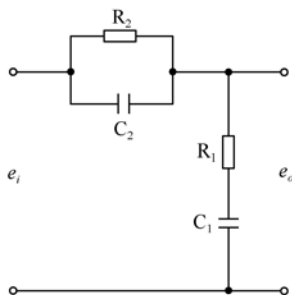


图 2-12 电气系统

**解** (1) 若图 2-11 所示机械系统的运动方程遵循以下原则: 并联元件的合力等于两元件上的力相加, 平行移动, 位移相同, 串联元件各元件受力相同, 总位移等于各元件相对位移之和, 则该系统的微分方程组为

$$\begin{cases} F = F_1 + F_2 = f_1(\dot{x}_i - \dot{x}_o) + K_1(x_i - x_o) \\ F = f_2(\dot{x}_o - \dot{y}) \\ F = K_2 y \end{cases}$$

取拉普拉斯变换, 并整理成因果关系有:

$$\begin{cases} F(s) = (f_1 s + K_1)[(x_i(s) - x_o(s))] \\ y(s) = \frac{1}{K_2} F(s) \\ x_o(s) = \frac{1}{f_2 s} F(s) + y(s) \end{cases}$$

画结构图如图 2-13 所示。框图化简求传递函数为

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{(k_1 + f_1 s)(\frac{1}{k_2} + \frac{1}{f_2 s})}{1 + (k_1 + f_1 s)(\frac{1}{k_2} + \frac{1}{f_2 s})} = \frac{(\frac{f_1}{k_1} s + 1)(\frac{f_2}{k_2} s + 1)}{(\frac{f_1}{k_1} s + 1)(\frac{f_2}{k_2} s + 1) + \frac{f_2}{k_1} s}$$

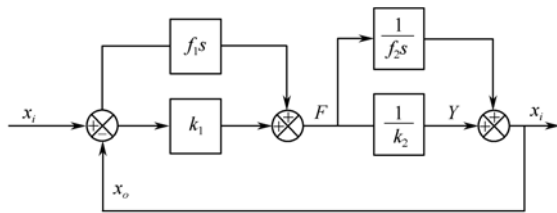


图 2-13 机械系统结构框图

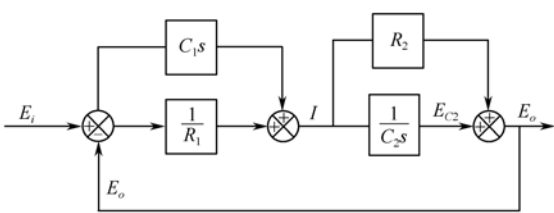


图 2-14 电气系统结构框图

(2) 写图 2-12 所示电气系统的运动方程，按电路理论，遵循的定律与机械系统相似，即并联元件总电流等于两元件电流之和，电压相等；串联元件电流相等，总电压等于各元件分电压之和。可见，电压与位移互为相似量电流与力互为相似量。

运动方程可直接用复阻抗写出：

$$\begin{cases} I(s) = I_1 + I_2(s) = \frac{1}{R_1}[E_i(s) - E_i(s)] + C_1 s[(E_i(s) - E_o(s))] \\ I(s) = \frac{1}{R_2}[E_o(s) - E_{C2}(s)] \\ I(s) = C_2 s + E_{C2}(s) \end{cases}$$

整理成因果关系：

$$\begin{cases} I(s) = (\frac{1}{R_1} + C_1 s)[(E_i(s) - E_o(s))] \\ E_{C2}(s) = \frac{1}{C_2 s} I(s) \\ E_o(s) = IR_2 + E_{C2}(s) \end{cases}$$

画结构图如图 2-14 所示。

求传递函数为

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{(\frac{1}{R_1} + C_1 s)(R_2 + \frac{1}{C_2 s})}{1 + (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{C_1 s})(R_2 + \frac{1}{C_2 s})} = \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1) + R_1 C_2 s}$$

对上述两个系统传递函数和结构图进行比较后可以看出，两个系统是相似的。机-电系统相似量之间的对应关系见表 2-6。

表 2-6 机-电系统相似量之间的对应关系

机械系统	$x_i$	$x_o$	$y$	$F$	$F_1$	$F_2$	$K_1$	$1/K_2$	$f_1$	$f_2$
电气系统	$e_i$	$e_o$	$e_{C2}$	$i$	$i$	$i$	$1/R$	$R$	$C_1$	$C_2$

例 2.7 如图 2-15 为一个闭环速度控制系统原理图，试建立以  $u_i(t)$  为输入、 $\omega(t)$  为输出的微分方程式，并求其传递函数。

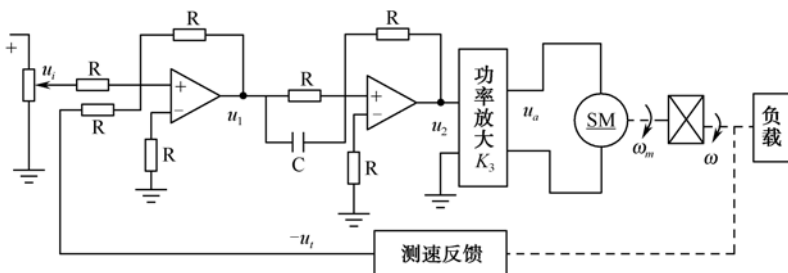


图 2-15 闭环速度控制系统原理图

**解** 本题为电气控制系统数学模型的建立，应从各环节（部件）的数学模型出发，依次列写，得到方程组后，画出传递函数框图，便可求出传递函数。

系统各环节微分方程如下。

$$\text{运算放大器 I: } u_1 = -\frac{R}{R}(u_i - u_t) = -K_1(u_i - u_t) = -(u_i - u_t)$$

$$\text{运算放大器 II: } u_2 = -\frac{R}{R}(RC \frac{du_1}{dt} + u_1) = -K_2(\tau \frac{du_1}{dt} + u_1) = -(\tau \frac{du_1}{dt} + u_1)$$

$$\text{功率放大器: } u_a = K_3 u_2$$

$$\text{直流电动机: } T_m \frac{d\omega_m}{dt} + \omega_m = K_m u_a - K_c M'_c$$

式中， $T_m$ 、 $K_m$ 、 $K_c$ 、 $M'_c$  为考虑齿轮系和负载后，折算到电动机轴上的等效值。

$$\text{齿轮系: } \omega = \frac{1}{i} \omega_m$$

$$\text{测速发电机: } u_t = K_t \omega$$

以上各式消去中间变量，可得到系统的微分方程：

$$T'_m \frac{d\omega}{dt} + \omega = K'_g \frac{du_i}{dt} + K_g u_i - K'_c M'_c$$

式中， $T'_m$ 、 $K'_g$ 、 $K_g$ 、 $K'_c$  分别为相应的系数。对上述各环节微分方程两边取拉普拉斯变换，得到系统的复域形式方程如下：

$$U_1(s) = -K_1[U_i(s) - U_t(s)]$$

$$U_2(s) = -K_2(\tau s + 1)U_1(s)$$

$$U_a(s) = K_3 U_2(s)$$

$$\Omega_m(s) = \frac{1}{T_m s + 1}[K_m U_a(s) - K_c M'_c(s)]$$

$$\Omega(s) = \frac{1}{i} \Omega_m(s)$$

$$U_t(s) = K_t \Omega(s)$$

从而可以画出系统传递函数框图，如图 2-16 所示。

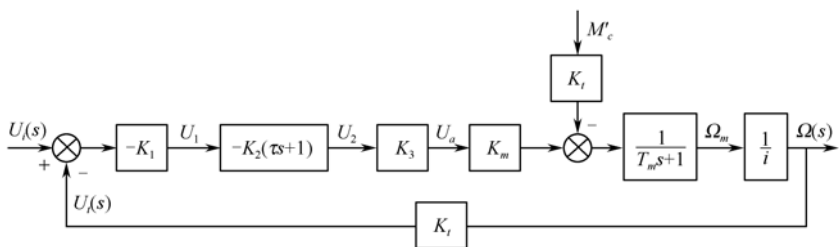


图 2-16 系统传递函数框图

根据传递函数框图化简，得到系统的传递函数：

$$\Phi(s) = \frac{K_1 K_2 K_3 K_m (\tau s + 1) \frac{1}{i(T_m s + 1)}}{1 + K_1 K_2 K_3 K_i K_n (\tau s + 1) \frac{1}{i(T_m s + 1)}}$$

**例 2.8** 某随动系统（位置控制系统）如图 2-17 所示。该系统的任务是控制机械负载的位置，使其与参考位置相协调。试画出该系统的传递函数框图；列写系统的传递函数。

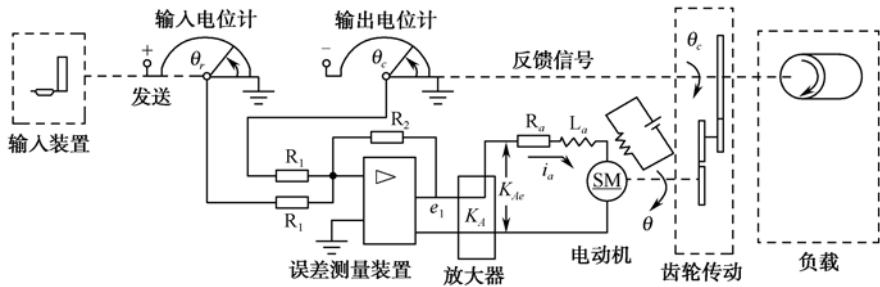


图 2-17 随动系统原理图

**解** 该系统的工作原理：用一对电位计作为系统的误差测量装置，将输入和输出位置信号转换为与位置成正比的电信号。输入电位计电刷臂的角位置  $\theta_r$  由控制输入信号确定，角位置  $\theta_r$  就是系统的参考输入量。而电刷臂上的电位与电刷臂的角位置成正比，输出电位计电刷臂的角位置  $\theta_c$  由输出轴的位置确定。电位差  $e = K_s(e_r - e_c)$  就是误差信号（ $K_s$  为桥式电位器的传递函数），该信号被增益常数为  $K_A$  的放大器放大（ $K_A$  应具有很高的输入阻抗和很低的输出阻抗），放大器的输出电压作用到直流电动机的电枢电路上。电动机激磁绕组上加有固定电压。如果出现误差信号，电动机就产生力矩以转动输出负载，并使误差信号减少到零。

当激磁电流固定时，对于电枢电路有：

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_b \frac{d\theta}{dt} = K_A K_s e$$

$$(L_a s + R_a) I_a(s) = K_A K_s E(s) - K_b s \Theta(s)$$

式中， $L_a$  和  $R_a$  为电动机电枢绕组的电感和电阻； $K_b$  为电动机的反电势常数； $\theta$  为电动机的轴的角位移。

电动机的力矩平衡方程为

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} = M = C_m i_a$$

$$(Js^2 + fs)\theta(s) = M(s) = C_m I_a(s)$$

式中,  $J$  为电动机负载和齿轮传动装置折合成到电动机轴上的组合转动惯量;  $f$  为电动机负载和齿轮传动装置折合成到电动机轴上的黏性摩擦系数;  $C_m$  为电动机的转矩系数;  $i_a$  为电枢电流。

并且,  $\theta_c = \frac{1}{i}\theta$ ,  $\theta_c(s) = \frac{1}{i}\theta(s)$ 。根据各环节输入/输出关系, 可画出系统的传递函数框图如图 2-18 所示。

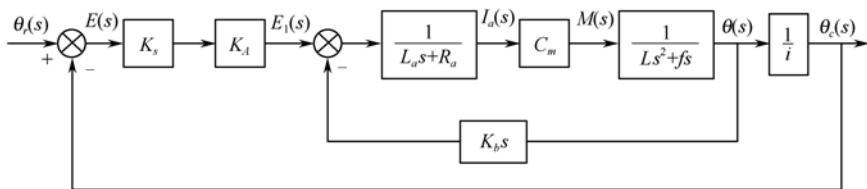


图 2-18 随动系统传递函数框图

图 2-18 为单位反馈系统, 反馈回路传递函数为 1。系统的开环传递函数 (即前向通路传递函数) 为

$$G(s) = K_s K_A \frac{\frac{1}{L_a s + R_a} C_m \frac{1}{Js^2 + fs}}{1 + \frac{C_m \cdot K_b s}{(L_a s + R_a)(Js^2 + fs)}} \cdot \frac{1}{i} = \frac{K_s K_A C_m / i}{(L_a s + R_a)(Js^2 + fs) + C_m K_b s}$$

如果略去电枢电感  $L_a$  可得:

$$G(s) = \frac{K_s K_A C_m / (i R_a)}{s(Js + f + \frac{C_m K_b}{R_a})} = \frac{K_1}{s(Js + F)} = \frac{K_1 / F}{s(\frac{J}{F}s + 1)} = \frac{K}{s(T_m s + 1)}$$

式中,  $K_1 = K_s K_A C_m / (i R_a)$  为增益;  $F = f + C_m K_b / R_a$  为阻尼系数, 由于  $K_b$  电动机反电动势的存在, 增大了系统的黏性摩擦;  $K = K_1 / F$  为开环增益;  $T_m = J / F$  为机电时间常数。在不考虑负载力矩的情况下, 随动系统的开环传递函数可以简化为  $G(s) = \frac{K}{s(T_m s + 1)}$ 。相应的闭环传

递函数为

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \frac{\theta_c(s)}{\theta_r(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{K}{T_m s^2 + s + K} \\ &= \frac{K/T_m}{s^2 + \frac{1}{T_m}s + \frac{K}{T_m}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \frac{K}{T_m}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \end{aligned}$$

则无阻尼振荡频率  $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T_m}}$ , 阻尼比  $\xi = \frac{1}{2\sqrt{T_m K}}$ 。



## 2.4 习题解析

**题 2.1** 试建立图 2-19 所示机械系统的微分方程。其中外力  $x_i(t)$  为输入量，位移  $x_o(t)$  为输出量；弹性系数  $k$ 、阻尼系数  $c$ 、质量  $m$  均为常数。

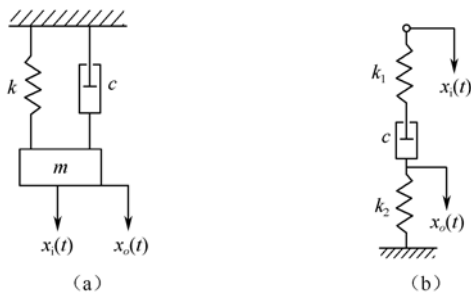


图 2-19 机械系统

**【解析】**(a) 取  $m$  中心点为平衡点，对质量块进行受力分析，根据牛顿定理列出输入和输出的微分方程。(b) 对 A、B 质点进行受力分析，根据牛顿定理并消除中间变量列出微分方程。

**解** (a) 以平衡状态为基点，对质块  $m$  进行受力分析（不考虑重力影响），如图 2-20 (a) 所示。

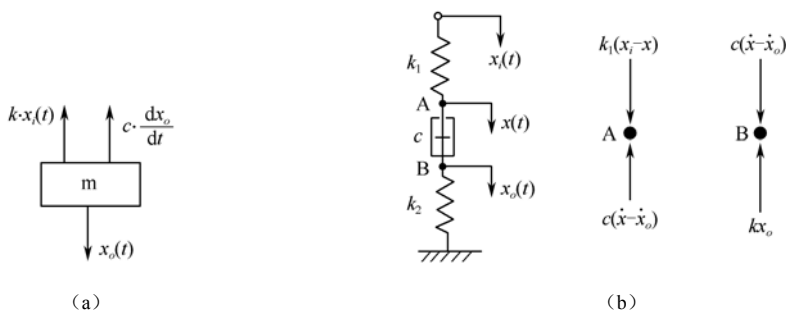


图 2-20 机械系统受力分析

根据牛顿定理可写出：

$$x_i(t) - kx_o(t) - c \frac{dx_o}{dt} = m \frac{d^2 x_o}{dt^2}$$

整理得：

$$\frac{d^2 x_o(t)}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dx_o(t)}{dt} + \frac{k}{m} x_o(t) = \frac{1}{m} x_i(t)$$

(b) 如图 2-20 (b) 所示，取 A、B 两点分别进行受力分析。对 A 点有：

$$k_1(x_i - x) = c\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_o}{dt}\right) \quad (1)$$

对 B 点有

$$c\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_o}{dt}\right) = k_2 x_o \quad (2)$$

联立式 (1)、式 (2) 可得:

$$\frac{dx_o}{dt} + \frac{k_1 k_2}{c(k_1 + k_2)} x_o = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \frac{dx_i}{dt}$$

**题 2.2** 试建立图 2-21 所示电路系统的微分方程。其中, 输入电压为  $u_i(t)$ , 输出电压为  $u_o(t)$ ; 电阻  $R$ 、电容  $C$  均为常数。

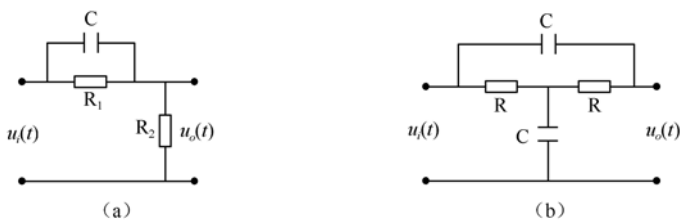


图 2-21 电路系统

**【解析】**对电网络的分析, 一般是建立电流中间变量, 根据基尔霍夫定律, 消除中间变量得到电压平衡的微分方程。

**解** (a) 应用复数阻抗概念可写出:

$$U_i(s) = \frac{R_1 \frac{1}{Cs}}{R_1 + \frac{1}{Cs}} I(s) + U_o(s) \quad (1)$$

$$I(s) = \frac{U_o(s)}{R_2} \quad (2)$$

联立式 (1)、式 (2), 可解得: 
$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{R_2(1 + R_1 Cs)}{R_1 + R_2 + R_1 R_2 Cs}$$

微分方程为: 
$$\frac{du_o}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} u_o = \frac{du_i}{dt} + \frac{1}{CR_1} u_i$$

(b) 由图 2-21 (b) 可写出:

$$\begin{cases} U_i(s) = R I_R(s) + [I_R(s) + I_o(s)] \frac{1}{Cs} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} I_o(s) \frac{1}{Cs} = R I_R(s) - R I_o(s) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} U_o(s) = I_o(s) R + [I_R(s) + I_o(s)] \frac{1}{Cs} \end{cases} \quad (5)$$

联立式 (3)、式 (4)、式 (5), 消去中间变量  $I_o(s)$  和  $I_R(s)$ , 可得:

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{R^2 C^2 s^2 + 2RCs + 1}{R^2 C^2 s^2 + 3RCs + 1}$$

$$\text{微分方程为: } \frac{du_o^2}{dt^2} + \frac{3}{CR} \frac{du_o}{dt} + \frac{1}{C^2 R^2} u_o = \frac{du_i^2}{dt^2} + \frac{2}{CR} \frac{du_i}{dt} + \frac{1}{C^2 R^2} u_i$$

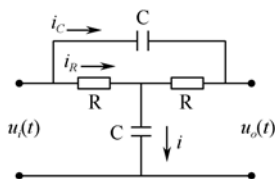


图 2-22 电路系统分析

**题 2.3** 试证明图 2-23 所示的力学系统和电路系统是相似系统。

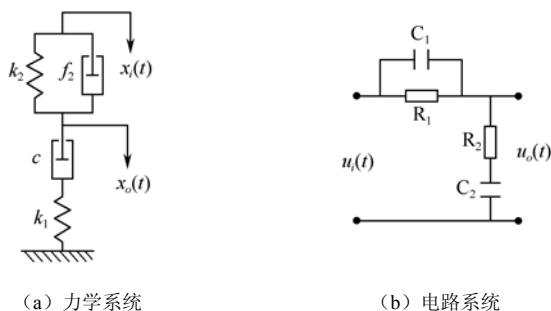


图 2-23 力学系统和电路系统

**【解析】** 分别根据牛顿定理和基尔霍夫定理列出力学系统和电路系统的微分方程，通过拉普拉斯变换分别求出其传递函数，比较传递函数证明力学系统和电路系统是相似系统。

**解** (a) 取 A、B 两点分别进行受力分析，如图 2-24 所示。对 A 点有：

$$k_2(x_i - x_o) + f_2(\dot{x}_i - \dot{x}_o) = c(\dot{x}_o - \dot{x}) \quad (1)$$

$$f_1(x_o - x) = k_1 x \quad (2)$$

对式 (1)、式 (2) 分别取拉普拉斯变换，消去中间变量  $x$ ，整理后得：

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{\frac{cf_2}{k_1 k_2} s^2 + (\frac{c}{k_1} + \frac{f_2}{k_2})s + 1}{\frac{cf_2}{k_1 k_2} s^2 + (\frac{c}{k_1} + \frac{f_2}{k_2} + \frac{f_2}{k_1})s + 1}$$

(b) 由图 2-24 可得：

$$\frac{U_o(s)}{R_2 + \frac{1}{C_2 s}} = \frac{U_i(s)}{R_2 + \frac{1}{C_1 s} + \frac{R_1 \cdot \frac{1}{C_1 s}}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}}}$$

整理得：

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2)s + 1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)s + 1}$$

比较两系统的传递函数, 如果设  $R_1 = 1/k_1, R_2 = 1/k_2, C_1 = c, C_2 = f_2$ , 则两系统的传递函数相同, 所以两系统是相似的。

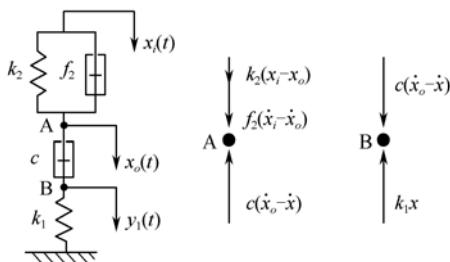


图 2-24 力学系统分析

**题 2.4** 求下列函数的拉普拉斯变换:

- (1)  $f(t) = 1 + 4t + t^2$
- (2)  $f(t) = \sin 4t + \cos 4t$
- (3)  $f(t) = t^3 + e^{4t}$
- (4)  $f(t) = t^n e^{at}$
- (5)  $f(t) = (t-1)^2 e^{2t}$

**【解析】** 根据拉普拉斯变换的主要定理和典型函数的拉普拉斯变换而求得。

解 (1)  $F(s) = \frac{1}{s} + \frac{4}{s^2} + \frac{2}{s^3}$

(2)  $F(s) = \frac{4}{s^2 + 16} + \frac{s}{s^2 + 16} = \frac{s + 4}{s^2 + 16}$

(3)  $F(s) = \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s - 4} = \frac{s^4 + 6s - 24}{s^5 - 4s}$

(4)  $t^n$  的拉普拉斯变换为

$$L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

运用复数域的位移定理, 有:

$$L[t^n e^{-at}] = \frac{n!}{(s + a)^{n+1}}$$

(5) 原式  $= e^2 [(t-1)^2 e^{2(t-1)}]$

运用实数域的位移定理, 有:

$$L[e^{-2}(t-1)^2 e^{-2(t-1)}] = \frac{2e^{-2}}{(s+2)^2}$$

题 2.5 求下列各拉普拉斯变换式的原函数。

$$(1) F(s) = \frac{e^{-s}}{s-1}$$

$$(2) F(s) = \frac{1}{s(s+2)^3(s+3)}$$

$$(3) F(s) = \frac{s+1}{s(s^2+2s+2)}$$

$$(4) F(s) = \frac{20(s+1)(s+3)}{(s+2)(s+4)(s^2+2s+2)}$$

【解析】根据拉普拉斯变换的主要定理和典型函数的拉普拉斯变换，对传递函数进行反向推导而求得变换式的原函数。

解 (1)  $x(t) = e^{t-1}$

$$(2) \text{原式} = \frac{-1}{2(s+2)^3} + \frac{1}{4(s+2)^2} - \frac{3}{8(s+2)} + \frac{1}{24s} + \frac{1}{3(s+3)}$$

$$x(t) = -\frac{t^2}{4}e^{-2t} + \frac{t}{4}e^{-2t} - \frac{3}{8}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{24}$$

$$(3) \text{原式} = \frac{1}{2s} - \frac{\frac{1}{2}s}{s^2+2s+2} = \frac{1}{2s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(s+1)^2+1}$$

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-t}(\sin t - \cos t)$$

$$(4) \text{原式} = \frac{-5}{s+2} + \frac{-3}{s+4} + \frac{4+3j}{s+1+j} + \frac{4-3j}{s+1-j}$$

$$x(t) = -5e^{-2t} - 3e^{-4t} + (4+3j)e^{-(1+j)t} + (4-3j)e^{-(1-j)t}$$

题 2.6 试求图 2-25 所示各信号  $x(t)$  的象函数  $X(s)$ 。

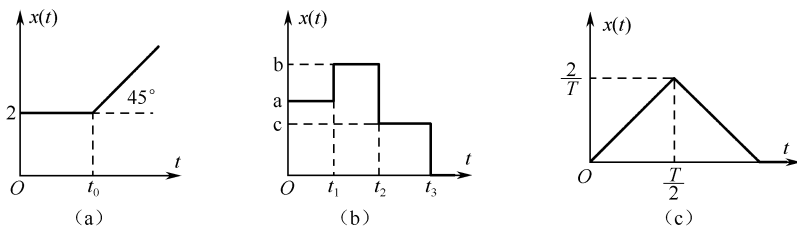


图 2-25 题 2.6 图

【解析】根据图形规律列出信号  $x(t)$  的方程，分别对  $x(t)$  进行拉普拉斯变换求出象函数  $X(s)$ 。

解 (a)  $\Theta x(t) = 2 + (t - t_0)$

$$X(s) = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} e^{-t_0 s}$$

(b)  $\Theta x(t) = a + (b - a)(t - t_1) - (b - c)(t - t_2) - c(t - t_3)$

$$X(s) = \frac{1}{s} [a + (b - a)e^{-t_1 s} - (b - c)e^{-t_2 s} - ce^{-t_3 s}]$$

(c)  $\Theta x(t) = \frac{4}{T^2}t - \frac{4}{T^2}(t - \frac{T}{2}) - \frac{4}{T^2}(t - \frac{T}{2}) + \frac{4}{T^2}(t - T)$

$$X(s) = \frac{4}{T^2 s^2} (1 - 2e^{-\frac{T}{2}s} + e^{-Ts})$$

**题 2.7** 已知在零初始条件下, 系统的单位阶跃响应为  $x_o(t) = 1 - 2e^{-2t} + e^{-t}$ , 试求系统的传递函数和单位脉冲响应。

**【解析】** 对系统的单位阶跃响应求拉普拉斯变换, 根据传递函数的定义求出系统的传递函数, 再对传递函数求拉普拉斯逆变换得到系统的单位阶跃响应。

解 单位阶跃输入时, 有  $X_i(s) = \frac{1}{s}$ , 可得

$$X_o(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+1} = \frac{3s+2}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{1}{s}$$

所以

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{3s+2}{(s+1)(s+2)}$$

则

$$k(t) = L^{-1}[G(s)] = L^{-1}\left[\frac{-1}{s+1} + \frac{4}{s+2}\right] = 4e^{-2t} - e^{-t}$$

**题 2.8** 某位置随动系统原理框图如图 2-26 所示, 已知电位器最大工作角度  $Q_m = 330^\circ$ , 功率放大器放大系数为  $K_3$ 。

- (1) 分别求出电位器的传递函数  $K_0$ , 第一级和第二级放大器的放大系数  $K_1$ 、 $K_2$ ;
- (2) 画出系统的传递函数框图;
- (3) 求系统的闭环传递函数  $X_o(s)/X_i(s)$ 。

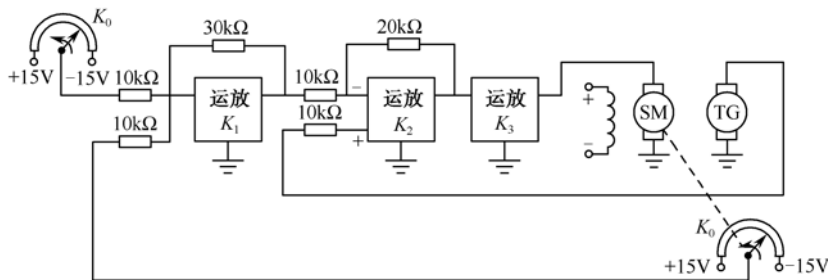


图 2-26 位置随动系统原理框图

【解析】根据传递函数定义和运算放大器的性质求分别求出电位器的传递函数  $K_0$ ，第一级和第二级放大器的放大系数  $K_1$ 、 $K_2$ ；根据系统的原理框图画出系统的传递函数框图；再根据框图简化原则简化框图得到系统的传递函数。

解 (1) 电位器的传递函数：

$$K_0 = \frac{E}{Q_m} = \frac{30}{330^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}} = \frac{180^\circ}{11\pi}$$

根据运算放大器的特性，可分别写出两级放大器的放大系数为

$$K_1 = -\frac{30 \times 10^3}{10 \times 10^3} = -3, \quad K_2 = -\frac{20 \times 10^3}{10 \times 10^3} = -2$$

(2) 可画出系统结构如图 2-27 所示：

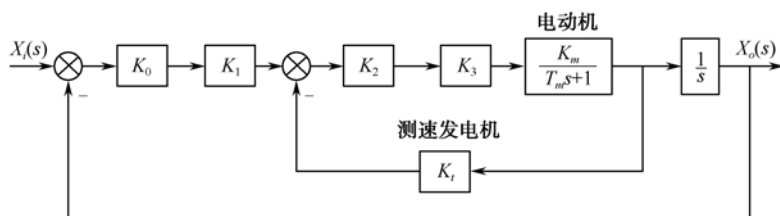


图 2-27 系统结构框图

$$\begin{aligned} (3) \quad \frac{X_o(s)}{X_i(s)} &= \frac{\frac{K_0 K_1 K_2 K_3 K_m}{s(T_m s + 1)}}{1 + \frac{K_2 K_3 K_m K_t}{T_m s + 1} + \frac{K_0 K_1 K_2 K_3 K_m}{s(T_m s + 1)}} \\ &= \frac{1}{\frac{T_m}{K_0 K_1 K_2 K_3 K_m} s^2 + \frac{1 + K_2 K_3 K_m K_t}{K_0 K_1 K_2 K_3 K_m} s + 1} \end{aligned}$$

题 2.9 飞机俯仰角控制系统结构图如图 2-28 所示，试求闭环传递函数  $X_o(s)/X_i(s)$ 。

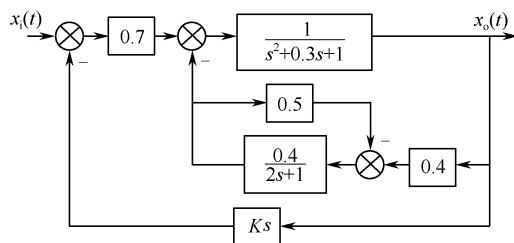


图 2-28 飞机俯仰角控制系统结构图

【解析】根据传递框图等效简化的原则简化框图，注意前向通道与反馈通道的简化方式，得到系统闭环传递函数。

解 经结构图等效变换可得闭环系统的传递函数:

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{0.7(s+0.6)}{s^3 + (0.9+0.7K)s^2 + (1.18+0.42K)s + 0.68}$$

题 2.10 已知系统方程组如下, 试绘制系统传递函数框图, 并求闭环传递函数  $X_o(s)/X_i(s)$ 。

$$\begin{cases} X_1(s) = G_1(s)X_i(s) - G_1(s)[G_7(s) - G_8(s)]X_o(s) \\ X_2(s) = G_2(s)[X_1(s) - G_6(s)X_3(s)] \\ X_3(s) = [X_2(s) - X_o(s)G_5(s)]G_3(s) \\ X_o(s) = G_4(s)X_3(s) \end{cases}$$

【解析】根据各环节传递函数框图画结构图, 等效化简求出系统的闭环传递函数。

解 系统结构图如图 2-29 所示。

利用结构图等效化简可求出系统的闭环传递函数为

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{G_1G_2G_3G_4}{1 + G_2G_3G_6 + G_3G_4G_5 + G_1G_2G_3G_4G_7 - G_1G_2G_3G_4G_8}$$

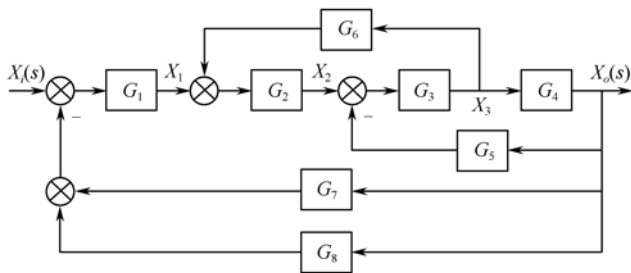


图 2-29 系统结构图

题 2.11 已知控制系统结构框图如图 2-30 所示, 求输入  $x_i(t) = 3u(t)$  时系统的输出  $x_o(t)$ 。

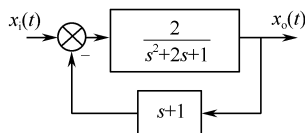


图 2-30 控制系统结构框图

【解析】首先求得闭环系统的传递函数, 根据传递函数的定义和性质求得输入为  $x_i(t) = 3u(t)$  的输出  $X_o(s)$ , 再对  $X_o(s)$  进行拉普拉斯逆变换求得  $x_o(t)$ 。

解 由图 2-30 可得:

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{\frac{2}{s^2 + 2s + 1}}{1 + \frac{2}{s^2 + 2s + 1}(s+1)} = \frac{2}{(s+1)(s+3)}$$

又有:

$$X_i(s) = \frac{3}{s}$$



则

$$X_o(s) = \frac{2}{(s+1)(s+3)} \cdot \frac{3}{s} = \frac{2}{s} - \frac{3}{s+1} + \frac{1}{s+3}$$

即

$$x_o(t) = L^{-1} \left[ \frac{2}{s} - \frac{3}{s+1} + \frac{1}{s+3} \right] = 2 - 3e^{-t} + e^{-3t}$$

题 2.12 试用传递函数框图等效化简原则求图 2-31 所示各系统的传递函数  $X_o(s)/X_i(s)$ 。

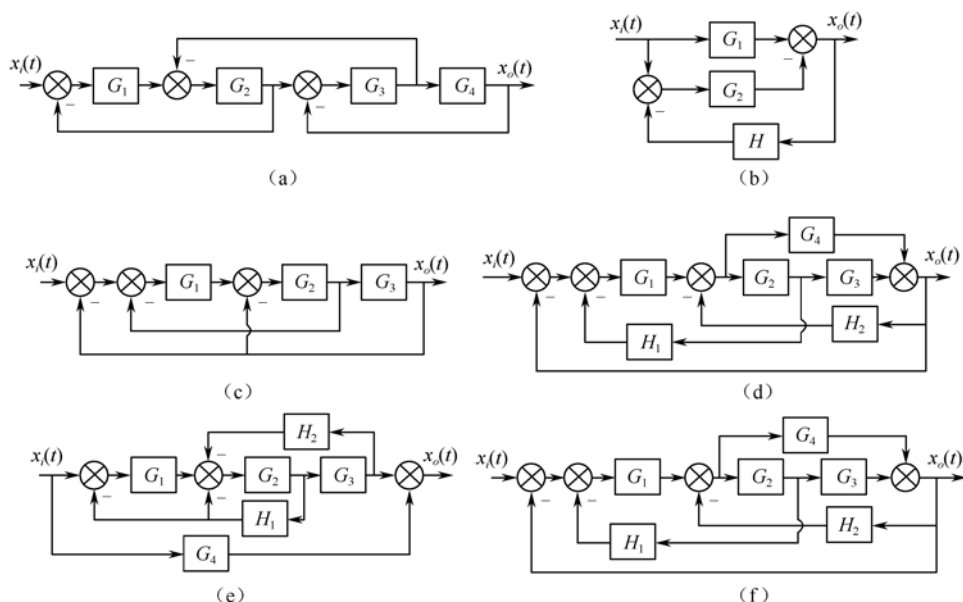


图 2-31 系统传递函数框图

解 (a)

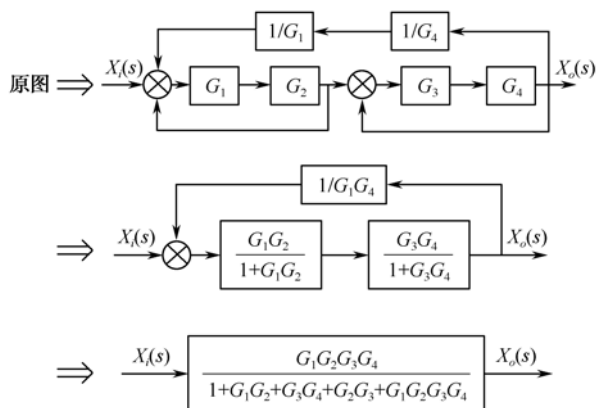


图 2-32 传递函数框图等效化简 (一)

系统的传递函数为

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_1 G_2 + G_3 G_4 + G_2 G_3 + G_1 G_2 G_3 G_4}$$

(b)

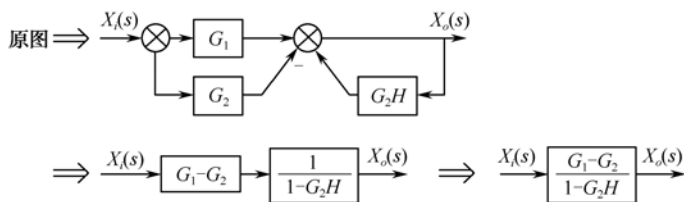


图 2-33 传递函数框图等效化简 (二)

系统的传递函数为

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{G_1 - G_2}{1 - G_2 H}$$

(c)

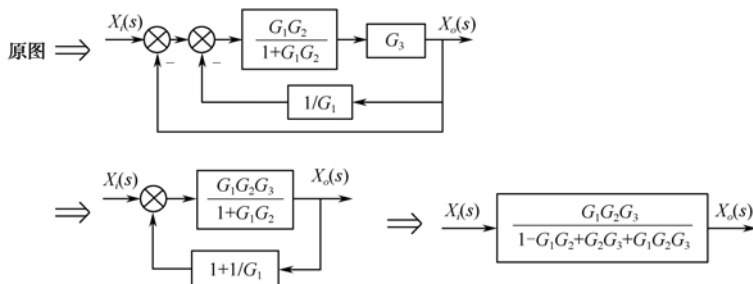


图 2-34 传递函数框图等效化简 (三)

系统的传递函数为

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 + G_2 G_3 + G_1 G_2 G_3}$$

(d)

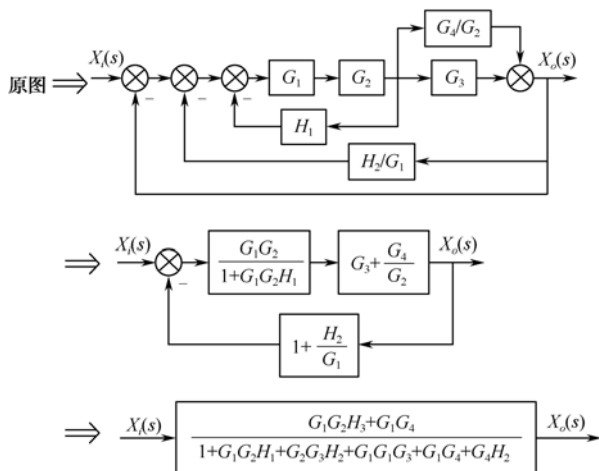


图 2-35 传递函数框图等效化简 (四)

系统的传递函数为

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_1 G_4}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3 + G_1 G_4 + G_4 H_2}$$

(e)

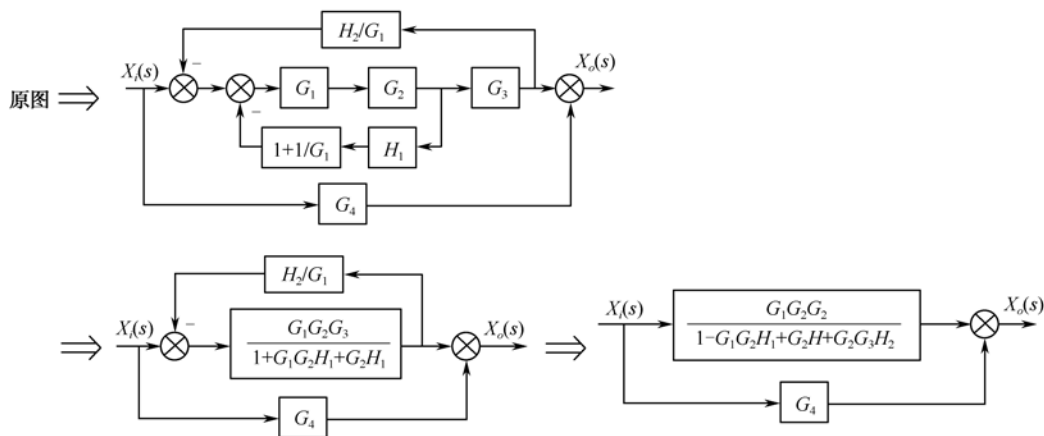


图 2-36 传递函数框图等效化简 (五)

系统的传递函数为

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = G_4 + \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2}$$

题 2.13 简化如图 2-37 所示的系统框图, 并求其系统的传递函数  $X_o(s)/X_i(s)$ 。

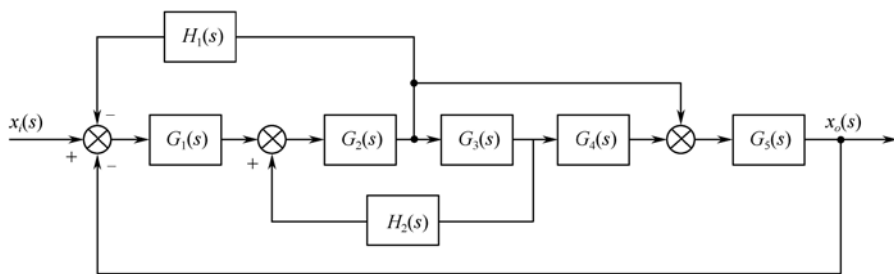


图 2-37 系统传递函数框图

【解析】利用传递函数框图等效化简原则对传递函数框图进行简化, 求得系统的传递函数。

解 根据框图化简的原则, 可将框图化简如图 2-38 所示。

系统的传递函数为

$$G_B(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{G_1 G_2 G_5 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_5}{1 + G_1 G_2 H_1 + (1 + G_3 G_4) G_1 G_2 G_5 - G_2 G_3 H_2}$$

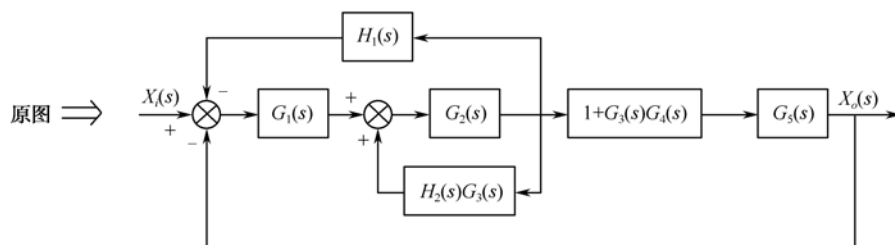


图 2-38 框图化简结果

# 第3章 控制系统的时域分析

## 3.1 基本要求及重难点

### 基本要求

- 了解系统时间响应概念、组成及典型输入信号;
- 掌握系统特征根与系统稳定性及动态性能的关系;
- 掌握一阶/二阶系统定义和特征参数,求解一阶/二阶系统的单位脉冲响应和单位阶跃响应;
- 掌握二阶系统振荡与阻尼比的关系,以及系统特征参数的计算和分析;
- 了解主导极点定义及系统降阶近似方法;
- 掌握系统稳定性概念以及与特征根之间的关系,掌握劳斯稳定判据的应用;
- 掌握系统误差概念、稳态误差的求法,掌握输入、结构和参数及干扰对系统误差的影响;
- 了解单位脉冲响应函数与系统传递函数之间的关系。

### 教学重点

- 系统稳定性与特征根实部的关系;
- 一阶/二阶系统的单位脉冲/阶跃响应;
- 二阶系统性能指标计算及分析;
- 系统稳定性判别与稳态误差计算。

### 教学难点

- 高阶系统近似和系统性能分析;
- 系统输入、结构、参数以及干扰对系统偏差的影响。

## 3.2 本章学习指导

### 3.2.1 系统响应构成与时域特征

#### 1. 时间响应概念

能直接观察到的响应叫输出。在经典控制理论中响应即输出,在现代控制理论中,状态变量不一定都能观察到。系统在输入信号作用下,其输出随时间的变化规律称为时间响应。实际稳定系统的输出时间响应由瞬态响应和稳态响应组成,如图 3-1 所示。

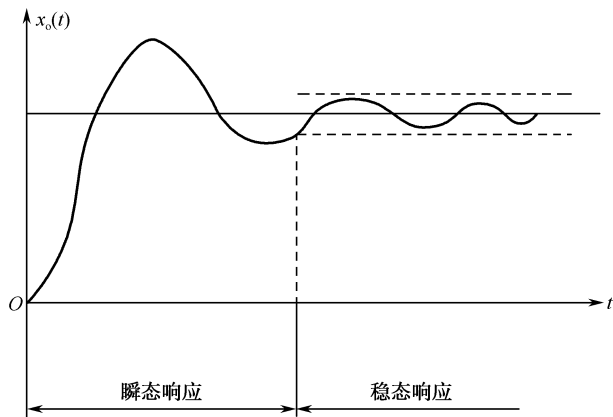


图 3-1 系统的时间响应曲线

系统在某一输入信号作用下，其输出量从初始状态到稳定状态的响应过程，称为系统的瞬态响应，反映控制系统的稳定性和快速性。系统在某一输入信号作用下，当  $t \rightarrow \infty$  时的时间响应即为稳态响应。工程实际常给出一个稳态误差  $\Delta$ ，当满足  $|x_o(t) - x(\infty)| \leq \Delta \cdot x(\infty)$  时，称系统已经进入稳态过程。

从时间历程角度看，实际系统发生状态变化时总存在过渡过程（动态过程）和稳态过程。其原因是系统中总有一些储能元件，使输出量不能立即跟随其输入量的变化。在过渡过程中系统动态性能充分体现，如输出响应是否迅速（快速性）、过渡过程是否有振荡、振荡程度是否剧烈（平稳性）、系统最后是否收敛稳定下来（稳定性）等。

2. 典型输入信号

控制系统的时间响应不仅取决于系统本身特性，还与输入信号的形式有关。实际系统的输入具有多样性，未知且可能是随机的，但从考察系统性能出发，总可以选取一些具有特殊性质的典型输入信号来替代。

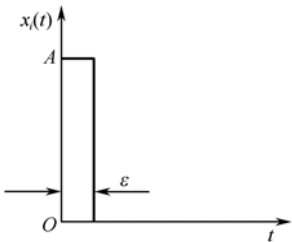
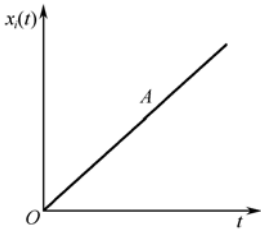
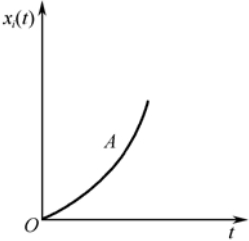
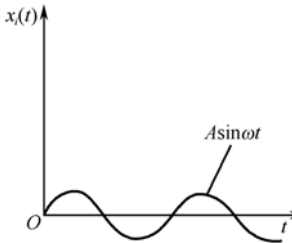
典型输入信号的选取原则：输入信号应能使系统充分显露出各种动态性能；能反映系统工作的大部分实际情况；能反映在最不利输入下系统的工作能力；应是简单函数，便于用数学公式表达、分析和处理；易于在实验室中获得。

在控制系统中，常用阶跃信号、脉冲信号、斜坡信号、抛物线信号和正弦信号 5 种信号作为典型的输入信号。典型输入信号的时域和复域数学表达式见表 3-1。

表 3-1 典型输入信号

信号	含 义	时 域 曲 线	时域表达式	复域表达式	应 用
阶跃信号	表示参考输入的一个瞬间突变过程		$x_i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A & t \geq 0 \end{cases}$ <p><math>A=1</math> 时，称为单位阶跃信号</p>	$L[u(t)] = L[1(t)] = \frac{1}{s}$	模拟指令、电压、负荷等的突然转换

续表

信号	含 义	时 域 曲 线	时域表达式	复域表达式	应 用
脉冲信号	可视为一个持续时间极短的信号		$x_i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \quad t > 0 \\ A & 0 < t < \epsilon \end{cases}$ $A=1, \quad h \rightarrow 0$ 时, 称为单位脉冲信号	$L[\delta(t)] = 1$	模拟碰撞、敲打、冲击等场合
斜坡信号	表示由零值开始随时间 $t$ 线性增长		$x_i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ At & t \geq 0 \end{cases}$ $A=1$ 时, 称为单位斜坡信号	$L[r(t)] = \frac{1}{s^2}$	模拟速度信号
抛物线信号	表示输入信号是等加速度变化的		$x_i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2}At^2 & t \geq 0 \end{cases}$ $A=1$ 时, 称为单位抛物线信号	$L[a(t)] = \frac{1}{s^3}$	模拟系统输入一个随时间而逐渐增加的信号
正弦信号	表示输入信号是正弦周期变化的		$x_i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A \sin \omega t & t \geq 0 \end{cases}$	$L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	模拟系统受周期信号作用

控制系统的时域分析法以计算分析为主，选取阶跃信号和脉冲信号作为输入信号；系统的频域分析法多以实验为主，用正弦信号作为输入信号。

3.2.2 系统时域动态性能分析

1. 时域分析的思路

系统在时域中的数学模型  $g(t)$  是微分方程，尤其是高阶微分方程时求解困难，对线性定常系统的时域分析常采用如图 3-2 所示的分析思路。

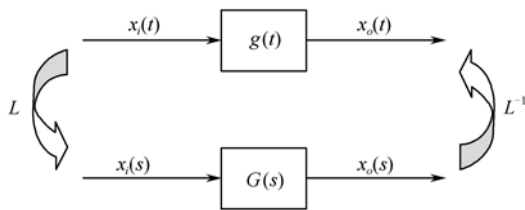


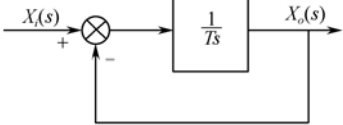
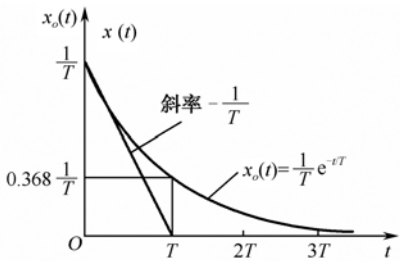
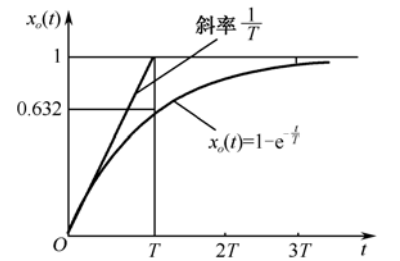
图 3-2 控制系统时域分析的思路

首先将系统的微分方程  $g(t)$  和选取的输入信号  $x_i(t)$  利用拉普拉斯变换转换到复数域，得到  $G(s)$  和  $X_i(s)$ ，然后在复数域进行代数运算  $X_o(s) = G(s)X_i(s)$ ，获得系统在复数域的输出  $X_o(s)$ ，最后利用拉普拉斯逆变换得到系统在时域的输出  $x_o(t)$ ，利用  $x_o(t)$  的表现来分析系统自身的动态性能。

2. 一阶系统的时间响应

由一阶微分方程描述的系统称为一阶系统。一阶系统结构、时域及复域输出见表 3-2。

表 3-2 一阶系统时间响应

系 统 结 构	
 $T \frac{dx_o(t)}{dt} + x_o(t) = x_i(t), \quad G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{1}{Ts + 1}, \quad T \text{ 为时间常数}$	
单位脉冲响应	单位阶跃响应
$x_o(t) = L^{-1} \left[ \frac{1}{Ts + 1} \right] = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0)$	$x_o(t) = L^{-1} \left[ \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s} \right] = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0)$
	

一阶系统的单位脉冲响应曲线是一条单调下降的指数曲线，只有瞬态项，稳态响应为零；初值为  $1/T$ ，当  $t$  趋于无穷大时，其值趋于零。若将以指数曲线衰减到初值的 2% 之前的过程定义为过渡过程，响应的时间为  $4T$ ，此时间为过渡过程时间或调整时间。为保证输出的准确性，对脉冲信号要求是： $h \leq 0.1T$ ，即脉冲宽度小于时间常数的 10%。

一阶系统的单位阶跃响应曲线是一条单调上升的指数曲线，稳态值为 1，瞬态过程平稳无振荡。用实验方法测出响应曲线达到稳态值的 63.2% 时，所用的时间即为惯性环节的时间常数  $T$ 。



如果系统的输入信号存在积分和微分关系，则系统的时间响应也存在对应的积分和微分关系，对阶跃响应微分即得到脉冲响应。

3. 二阶系统数学模型规格化与极点配置

凡是能够用二阶微分方程描述的系统都称为二阶系统，二阶系统的典型形式是振荡系统，二阶系统动态结构框图如图 3-3 所示。很多高阶系统在一定条件下也可近似地简化为二阶系统来研究。

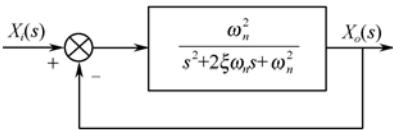


图 3-3 二阶系统动态结构框图

二阶系统的规格化传递函数为

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

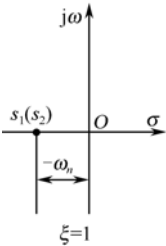
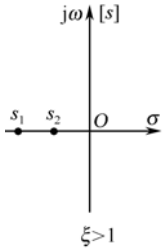
(3-1)

无阻尼固有频率  $\omega_n$  和阻尼比  $\xi$  称为二阶系统的特征参数，表明了二阶系统本身与外界无关的特性；特征多项式为  $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$ ，特征方程为  $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ ；特征方程的根  $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$  称为特征根，也就是系统的极点。当阻尼比  $\xi$  取值不同，系统在复平面的极点配置也不同，见表 3-3。

表 3-3 二阶系统极点配置

阻 尼 比	特 征 根	极 点 配 置
欠阻尼 $0 \leq \xi < 1$	一对共轭复数 $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$	
无阻尼系统 $\xi=0$	一对共轭纯虚数 $s_{1,2} = \pm j\omega_n$	

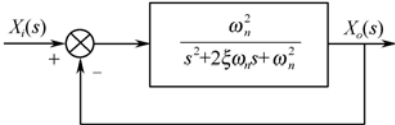
续表

阻 尼 比	特 征 根	极 点 配 置
临界阻尼 $\xi = 1$	一对相等负实根 $s_{1,2} = -\omega_n$	
过阻尼 $\xi > 1$	一对不等负实根 $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$	

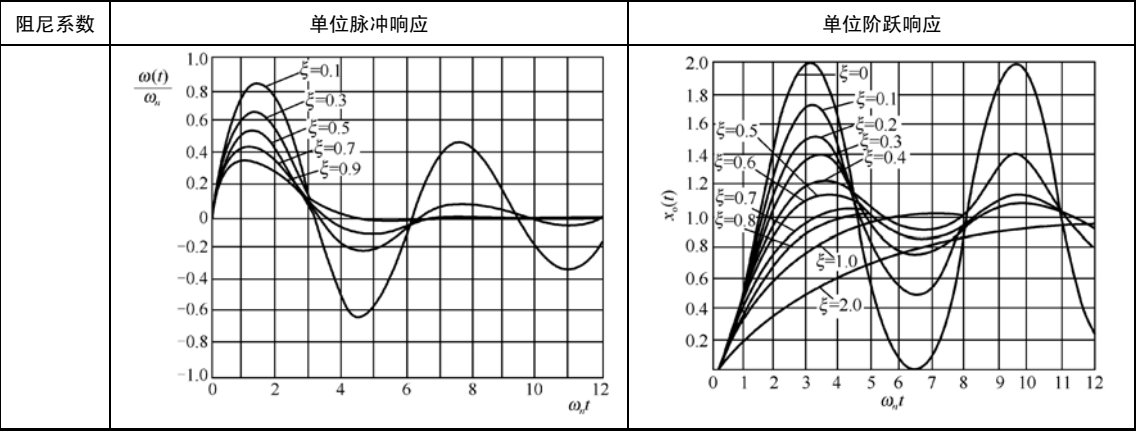
4. 二阶系统的单位脉冲响应

由于二阶系统的极点配置中阻尼比  $\xi$  的取值不同有四种情况，所以二阶系统的输出响应也有四种情况。现将二阶系统单位脉冲响应和单位阶跃响应汇总于表 3-4。

表 3-4 二阶系统单位脉冲响应和单位阶跃响应比较

系 统 结 构		
<div></div> <div><math display="block">\frac{dx_o^2(t)}{dt} + 2\xi\omega_n \frac{dx_o(t)}{dt} + \omega_n^2 x_o(t) = \omega_n^2 x_i(t) \quad X_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}</math></div>		
阻尼系数	单位脉冲响应	单位阶跃响应
$\xi = 0$	$x_o(t) = \omega_n \sin \omega_n t$	$x_o(t) = 1 - \cos \omega_n t$
$0 < \xi < 1$	$x_o(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin \omega_d t$	$x_o(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_d t + \beta)$
$\xi = 1$	$x_o(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$	$x_o(t) = 1 - (1 + \omega_n t) e^{-\omega_n t}$
$\xi > 1$	$x_o(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} [e^{-s_1 t} - e^{-s_2 t}]$	$x_o(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} (-\frac{1}{s_1} e^{s_1 t} + \frac{1}{s_2} e^{s_2 t})$

续表



$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$  称为二阶系统的有阻尼固有频率， $\beta = \arctg \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$  为阻尼角。欠阻尼系统的单位脉冲响应曲线是减幅正弦振荡曲线，其幅值衰减的快慢取决于  $\xi \omega_n$  值。欠阻尼系统常称为二阶振荡系统。

欠阻尼系统的单位阶跃响应的稳态分量 1，瞬态分量是一个以  $\omega_d$  为频率的衰减正弦振荡过程，曲线的衰减快慢取决于衰减指数  $\xi \omega_n$ 。当  $\xi = 0.4 \sim 0.8$  时，其过渡过程时间比临界阻尼时更短且振荡不太严重。选择合适的  $\omega_n$  和  $\xi$  值可使系统工作在  $\xi = 0.4 \sim 0.8$  的欠阻尼状态。

5. 二阶系统的时域瞬态性能指标

控制系统的基本要求是响应过程的稳定性、准确性和快速性。评价定性基本要求需要用一些定量性能指标来衡量。系统的性能指标形式选择为：二阶欠阻尼系统的单位阶跃响应（时域，二阶系统，单位阶跃输入，欠阻尼）。

二阶欠阻尼系统的典型输出响应过程如图 3-4 所示。其主要性能指标有：上升时间  $t_r$ 、峰值时间  $t_p$ 、最大超调量  $M_p$ 、调整时间  $t_s$ 、振荡次数  $N$ 。

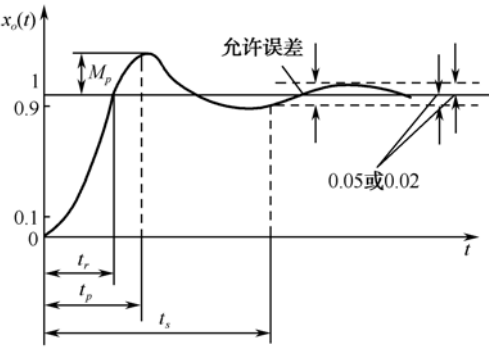


图 3-4 二阶系统响应的性能指标

二阶欠阻尼系统的性能指标定义及计算公式见表 3-5。

表 3-5 二阶欠阻尼系统的性能指标

性能指标	含 义	计 算 式	调 节
上升时间 $t_r$	响应曲线从原工作状态出发，第一次到达输出稳态值所需要的时间	$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - \arctg \sqrt{\frac{1-\xi^2}{\xi}}}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$	当 $\xi$ 一定时， $\omega_n$ 增大， $t_r$ 就减小；当 $\omega_n$ 一定时， $\xi$ 增大， $t_r$ 就增大
峰值时间 $t_p$	响应曲线到达第一个峰值所需要的时间	$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$	$t_p$ 是有阻尼振荡周期 $2\pi/\omega_d$ 的一半。 $\xi$ 一定时， $\omega_n$ 增大， $t_p$ 就减小； $\omega_n$ 一定时， $\xi$ 增大， $t_p$ 就增大
最大超调量 $M_p$	响应曲线最大峰值 $x_o(t_p)$ 与稳态值 $x_o(\infty)$ 的差	$M_p = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\%$	$M_p$ 仅与 $\xi$ 有关， $M_p$ 的大小直接说明系统的阻尼特性
调整时间 $t_s$	响应曲线达到并一直保持在稳态值的公差带 $\pm\Delta$ ( $\Delta=2\%$ 或 $5\%$ ) 内所需要的时间	$\begin{aligned} \Delta=0.02 \quad t_s &\geq \frac{4 + \ln \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}}{\xi\omega_n} \\ \Delta=0.05 \quad t_s &\geq \frac{3 + \ln \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}}{\xi\omega_n} \end{aligned}$	$\xi$ 一定时， $\omega_n$ 增大， $t_s$ 就减小，系统响应速度变快
振荡次数 $N$	调整时间 $t_s$ 内响应曲线振荡的次数	$\begin{aligned} \Delta=0.02 \quad N &= \frac{2\sqrt{1-\xi^2}}{\pi\xi} \\ \Delta=0.05 \quad N &= \frac{1.5\sqrt{1-\xi^2}}{\pi\xi} \end{aligned}$	$N$ 只与 $\xi$ 有关，随 $\xi$ 增大而减小，直接反映系统的阻尼特性

最佳阻尼比：一般取  $\xi = 0.707$  作为最佳阻尼比。此时系统不仅调整时间  $t_s$  最小，超调量  $M_p$  也不大，系统同时兼顾了快速性和平稳性两方面的要求。在具体设计时，通常根据对最大超调量  $M_p$  的要求来确定阻尼比  $\xi$ ，调整时间  $t_s$  主要根据系统的  $\omega_n$  来确定。

在性能指标中，上升时间  $t_r$ 、峰值时间  $t_p$ 、调整时间  $t_s$  反映系统的快速性，最大超调量  $M_p$ 、振荡次数  $N$  反映系统过渡过程的平稳性。这些性能指标并非在任何情况下都全部考虑。对于欠阻尼系统，主要的性能指标是上升时间  $t_r$ 、峰值时间  $t_p$ 、最大超调量  $M_p$  和调整时间  $t_s$ ；而对于过阻尼系统，则无须考虑峰值时间  $t_p$  和最大超调量  $M_p$ 。要使二阶系统具有满意的动态性能指标，必须选择合适的阻尼比  $\xi$  和无阻尼固有频率  $\omega_n$ 。提高  $\omega_n$ ，可以提高二阶系统的响应速度，减少上升时间  $t_r$ 、峰值时间  $t_p$  和调整时间  $t_s$ ；增大  $\xi$ ，可以减弱系统的振荡性能，即降低超调量  $M_p$ ，减少振荡次数  $N$ ，但会增大上升时间  $t_r$  和峰值时间  $t_p$ 。

很多实际系统瞬态响应的平稳性和快速性对结构参数的要求往往是矛盾的。为提高响应速度而加大开环增益，结果阻尼又偏小，使振荡加剧；反之，减少增益能显著改善平稳性，但瞬态过程又偏于迟缓。仅仅通过调整系统原有部件的有限参数，难以全面满足性能指标。在这种情况下，改善系统品质只得另辟新径，比如采取在原系统中引入附加控制信号的方法来着重提高响应某方面的性能，如加入误差信号的比例-微分控制、输出量的速度反馈控制等措施。

6. 高阶系统的时间响应

动态特性用三阶以上的微分方程描述的系统，通常称为高阶系统。直接对高阶系统进行分析往往比较复杂，通常是抓住主要矛盾，忽略次要因素，使问题简化。一般的高阶系统均可以化简为零阶、一阶和二阶环节的组合，二阶振荡环节的性能特征对高阶系统的近似非常重要。

高阶线性定常系统传递函数的因式形式如下：

$$G(s)=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}=\frac{K\prod_{j=1}^m(s+z_j)}{\prod_{i=1}^n(s+p_i)}$$

(3-2)

式中， $z_1,z_2,\cdots,z_m$  为系统闭环传递函数的零点； $p_1,p_2,\cdots,p_n$  为系统闭环传递函数的极点。

系统为稳定的前提下，其极点在[s]复平面左半部有两种情况：一是不相同的实数（实数极点可组成一阶项），二是实数极点和共轭复数极点（可组成二阶项）。高阶系统的时间响应见表 3-6。

表 3-6 高阶系统的时间响应

极 点 配 置	时 间 响 应
全部为不相同的实数（实数极点可组成一阶项）	$x_o(t)=a+\sum_{i=1}^nb_ie^{-p_it}\qquad (t\geq 0)$
实数极点和共轭复数极点（共轭复数极点可组成二阶项）	$x_o(t)=a+\sum_{i=1}^qb_ie^{-p_it}+\sum_{k=1}^re^{-\zeta_k\omega_{dk}t}\left[C_k\cos\omega_{dk}t+D_k\sin\omega_{dk}t\right]\qquad (t\geq 0)$ <p><math>a,\ b_i,\ C_k,\ D_k</math> 均为常数</p>

高阶系统的时间响应由稳态响应和瞬态响应组成，稳态响应与输入信号和系统的参数有关，瞬态响应取决于系统的参数，由低阶系统组合而成。

如果高阶系统中距虚轴最近的极点  $s_1,s_2$  附近没有零点干扰，且其他极点距虚轴的距离都在这对极点距虚轴距离的 5 倍以上，则距虚轴最近的极点称为主导极点。系统中主导极点对应的响应分量衰减最慢，可以认为系统的动态响应主要由主导极点决定。但应注意的是，当有零点接近距离虚轴最近的极点时，由于零点的干扰作用，该极点便失去主导极点的作用。找到系统的一对共轭复数主导极点，忽略非主导极点的影响，高阶系统就可以近似当做二阶振荡系统来分析，相应的性能指标都可以按二阶系统得到估计。

3.2.3 控制系统的稳定性

1. 系统稳定性与判定条件

稳定是控制系统正常工作的首要条件，也是控制系统的重要性能指标之一。分析系统的稳定性是经典控制理论的重要组成部分。

**系统稳定性定义：**若系统在初始条件影响下，其过渡过程随时间的推移逐渐衰减并趋于 0，则系统稳定；反之，系统过渡过程随时间的推移而发散，则系统不稳定。

如果一个系统受到干扰,偏离了原来的平衡状态;当干扰取消后,这个系统又能恢复原来的状态,则这个系统是稳定的;否则,称系统是不稳定的。稳定性是系统的固有特性,只取决于系统内部结构和参数,是一种自身恢复能力,与输入量种类、性质无关。

设零输入条件下由系统初始条件引起的输出为  $x_0(t)$ , 若系统要稳定, 须需满足条件:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_0(t) = 0$$

线性定常系统稳定性的充要条件是: 系统特征方程的根全部具有负实部。由于系统特征根就是系统闭环传递函数的极点, 所以系统稳定性的充要条件还可以表述为: 系统传递函数的极点全部位于[s]复平面的左半部。如果特征根中有一个或以上的根的实部为正, 则系统不稳定; 若系统有一对共轭极点位于虚轴上或有一极点位于原点, 其他极点均位于[s]复平面的左半平面, 则零输入响应趋于等幅振荡或恒定值, 此时系统处于临界稳定状态。工程意义上临界稳定属于不稳定系统。零点对稳定性无影响, 仅反映外界输入对系统的作用。

系统稳定性的判定通常有两种方法: 一是直接求解出特征方程的根, 看这些根是否全部具有负实部, 但高阶系统求解困难; 二是看其特征根是否全部具有负实部, 以此来判断系统的稳定性, 这种方法避免了对特征方程的直接求解, 由此产生了一系列稳定性判据, 如时域的劳斯(Routh)判据、胡尔维茨(Hurwitz)判据等, 频域的奈奎斯特(Nyquist)、伯德(Bode)判据等。

## 2. 劳斯(Routh)稳定性判据

劳斯稳定性判据是基于特征方程的根和系数之间的关系建立起来的, 通过对特征方程各项系数的代数运算, 直接判断其根是否在[s]复平面的左半平面, 这种判据又称为代数判据。

劳斯稳定性判据的充要条件如下。

**充分条件:** 要使全部特征根  $s_1, s_2, \dots, s_n$  均具有负实部, 就必须满足特征方程的各项系数  $a_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$  都不等于零, 且符号都相同。

**必要条件:** 符合劳斯判据。劳斯表中第一列各元素的符号均为正, 且值不为零。如果劳斯表中第一列系数的符号有变化, 则系统不稳定, 其符号变化的次数等于该特征方程式的根在[s]复平面的右半平面上的个数。

采用劳斯稳定判据判别系统稳定性的步骤如下。

(1) 列出系统的特征方程  $B(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$ , 检查各项系数  $a_i$  是否都大于零。若都大于零, 则进行第(2)步。

(2) 按系统的特征方程列写劳斯表。

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$a_{n-6}$	$\dots$
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$a_{n-7}$	$\dots$
$s^{n-2}$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$\dots$
$s^{n-3}$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$s^2$	$D_1$	$D_2$			
$s^1$	$E_1$				
$s^0$	$F_1$				

表中,  $A_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$ ,  $A_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$ ,  $A_3 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$  ...

一直计算到  $A_i = 0$  为止。

$$B_1 = \frac{A_1 a_{n-3} - a_{n-1} A_2}{A_1}, B_2 = \frac{A_1 a_{n-5} - a_{n-1} A_3}{A_1}, B_3 = \frac{A_1 a_{n-7} - a_{n-1} A_4}{A_1} \dots$$

一直计算到  $B_i = 0$  为止。

用同样的方法, 求取劳斯表中其余行的元素, 一直到第  $n+1$  行排完为止。表中空缺的项, 运算时以零代入。

(3) 考察劳斯表中第一列系数的符号, 判断系统稳定情况。若第一列各数均为正数, 则闭环特征方程所有根具有负实部, 系统稳定。如果第一列中有负数, 则系统不稳定, 第一列中数值符号改变的次数就等于系统特征方程含有正实部根的数目。

### 3. 劳斯 (Routh) 稳定性判据的特殊情况

在列写劳斯表时, 可能出现两种特殊情况:

(1) 劳斯表的任意一行中, 若第一个元素为零, 其余各元素不全为零, 将使劳斯表无法往下排列。此时, 可用一个很小的正数  $\varepsilon$  代替零的那一项, 继续排列劳斯表中的其他元素。最后取  $\varepsilon \rightarrow 0$  的极限, 利用劳斯判据进行判断。

(2) 劳斯列表的任意一行中, 所有元素为零。出现这种情况的原因可能是系统中存在对称于复平面原点的特征根, 这些根或者是两个符号相反、绝对值相等的实根, 或者是一对共轭复数虚根, 或者是一对共轭复数根。由于根对称于复平面原点, 所以特征方程的次数总是偶数。出现任意一行全为零时, 可利用全为零的这一行的上一行的各项系数组成一个偶次辅助多项式; 对辅助多项式求导, 用辅助多项式一阶导数的系数代替劳斯表中的零行继续计算, 直到列出劳斯表; 解辅助方程, 可以得到特征方程中对称分布的根。

## 3.2.4 系统误差时域分析

控制系统的准确性是三大基本性能要求之一。系统的准确性用误差表示, 系统误差由过渡过程的瞬态误差和稳态运行时的稳态误差两部分组成。引起瞬态误差的内因是系统本身的结构, 引起稳态误差的内因当然也是系统本身的结构, 而外因则是输入量及其导数的连续变化部分。对于稳定系统, 稳态误差是衡量系统稳态响应的时域指标, 是系统控制精度及抑制干扰能力的度量。控制系统设计的主要任务之一就是如何使稳态误差最小或小于某一允许值。

### 1. 误差与偏差

系统误差  $e(t)$  一般定义为: 控制系统所期望的输出量  $x_{or}(t)$  与实际输出量  $x_o(t)$  之间的差值。

$$e(t) = x_{or}(t) - x_o(t) \quad (3-3)$$

闭环控制系统之所以能对输出  $X_o(s)$  起自动控制作用, 就在于运用偏差  $E(s)$  进行控制。一般情况下系统的误差  $E_1(s)$  和偏差  $E(s)$  之间的关系为

$$E_1(s) = \frac{1}{H(s)} E(s) \quad (3-4)$$

求出偏差  $E(s)$  后即可求出误差  $E_1(s)$ 。对于单位反馈系统  $H(s)=1$ ，则偏差与误差相同。系统分析往往把偏差作为误差的量度，用偏差信号来求取稳态误差。

## 2. 稳态误差与稳态偏差

在时域和复域中，系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_1(s) \quad (3-5)$$

同理，系统的稳态偏差为

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (3-6)$$

通常在输入信号  $X_i(s)$  和干扰信号  $N(s)$  共同作用下的系统框图如图 3-25 所示。

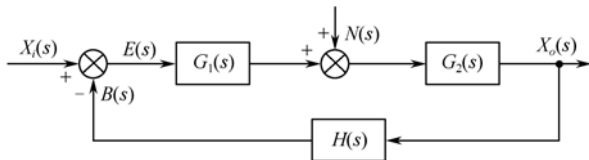


图 3-5 输入和扰动共同作用的系统框图

系统在  $X_i(s)$  和  $N(s)$  共同作用下的稳态误差为

$$e_{ss} = e_{iss} + e_{Nss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{H(s)} \frac{sX_i(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} - \frac{sG_2(s)N(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \right] \quad (3-7)$$

当  $H(s)=1$  时，系统误差  $e_{ss}$  等于系统偏差  $\varepsilon_{ss}$ ，因此分析时不再区分稳态误差  $e_{ss}$  和稳态偏差  $\varepsilon_{ss}$ 。

## 3. 系统的型次、偏差系数和稳态误差

线性系统开环传递函数的因式表达和型次表达如下：

$$G(s)H(s) = \frac{K_1(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = \frac{K(\tau_1s+1)(\tau_2s+1)\cdots(\tau_ms+1)}{s^v(T_1s+1)(T_2s+1)\cdots(T_{n-v}s+1)} \quad (3-8)$$

式中， $K$  为系统的开环增益； $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$  和  $T_1, T_2, \dots, T_{n-v}$  为时间常数； $v$  为开环传递函数中包含积分环节的个数。工程上，通常根据系统中包含积分环节的个数  $v$  来划分系统的类型： $v=0$  的系统称为 0 型系统； $v=1$  的系统称为 I 型系统； $v=2$  的系统称为 II 型系统；以此类推。

系统稳态误差除与输入信号  $X_i(s)$  有关外，只与系统的开增益  $K$  及  $v$  值有关。通常定义系统的偏差系数见表 3-7，通过偏差系数来求取系统的稳态误差见表 3-8。



表 3-7 系统输入信号与偏差系数的关系

输入信号	单位阶跃输入	单位斜坡输入	单位加速输入
偏差系数	静态位置误差系数 $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$	静态速度误差系数 $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$	静态加速度误差系数 $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)$

表 3-8 典型输入信号下系统的稳态误差

系统类型	单位阶跃输入	单位斜坡输入	单位加速输入
0 型系统	$\frac{1}{1+K_p}$	$\infty$	$\infty$
I 型系统	0	$\frac{1}{K_v}$	$\infty$
II 型系统	0	0	$\frac{1}{K_a}$

当输入为阶跃信号时，欲消除系统的稳态误差，要求开环传递函数  $G(s)H(s)$  中至少应配置一个积分环节，即  $v \geq 1$ 。不同  $v$  值下的阶跃响应曲线如图 3-6 所示。

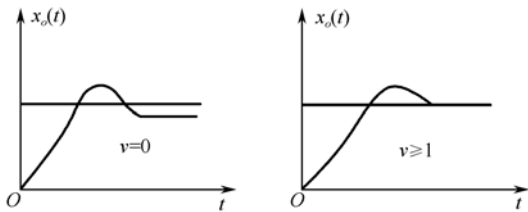


图 3-6 不同  $v$  值下的阶跃响应曲线

当输入为斜坡信号时，0 型系统不能跟随，误差趋于无穷大。I 型系统为有差系统，II 型系统及其以上系统为无差系统。欲消除系统在斜坡作用下的稳态误差，开环传递函数中至少应配置两个积分环节，即  $v \geq 2$ 。不同  $v$  值下的斜坡响应曲线如图 3-7 所示。

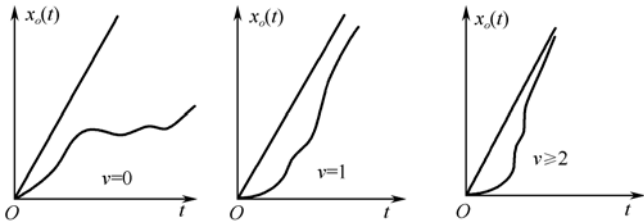


图 3-7 不同  $v$  值下的斜坡响应曲线

当输入为加速度信号时，0 型和 I 型系统不能跟随，II 型系统为有差系统，II 型及其以上系统为无差系统。欲消除或减少系统稳态误差，必须增加积分环节数目  $v \geq 3$  和提高开环放大系数  $K$ ，不同  $v$  值下的加速度响应曲线如图 3-8 所示。提高开环放大系数  $K$  与系统稳定性的要求是矛盾的。一般是首先保证稳态精度，然后采用某些校正措施改善系统的稳定性。

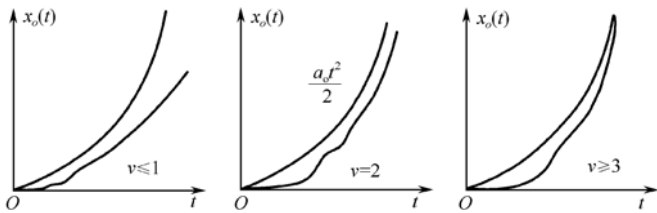


图 3-8 不同  $\nu$  值下的加速度响应曲线

由上述分析可见，同一系统，在输入信号不同时，系统的稳态误差不同；系统的稳态误差与系统的型次有关，在输入信号相同时，系统的型次越高，则稳态精度也越高，应根据系统承受输入情况选择系统的型次；系统的稳态误差随开环增益的增大而减小， $K$  值大有利于减小  $\varepsilon_{ss}$ ，但  $K$  值太大不利于系统的稳定性；要获得系统的稳态误差可以通过系统的稳态偏差来求取，系统的稳态偏差由系统的静态误差系数  $K_p$ 、 $K_v$ 、 $K_a$  来求得。在一定意义上  $K_p$ 、 $K_v$ 、 $K_a$  反映了系统减小或消除  $\varepsilon_{ss}$  的能力。

#### 4. 提高系统稳态精度的措施

当系统稳态精度不满足要求时，一般可采用如下措施来减小或消除系统的稳态误差。

(1) 提高系统的开环增益即放大系数：提高开环增益可以明显提高 0 型系统在阶跃输入、I 型系统在斜坡输入、II 型系统在抛物线输入作用下的稳态精度。但当开环增益过高时，会降低系统的稳定程度。

(2) 提高系统的型次：提高系统的型次，即增加开环系统中积分环节的个数，尤其是在扰动作用点前引入积分环节，可以减小稳态误差。但是单纯提高系统型次，同样会降低系统的稳定程度，因此一般不使用高于 II 型的系统。

(3) 复合控制结构：当要求控制系统既要高稳态精度，又要求有良好的动态性能时，如果单靠加大开环增益或在前向通道内串入积分环节，往往不能同时满足上述要求。这时可采用复合控制方法，即在反馈回路中加入前馈通路，组成前馈控制与反馈控制相结合的复合控制系统，以补偿参考输入和扰动作用产生的误差。复合控制系统解决了偏差控制系统中遇到的提高系统精度和保证稳定性之间的矛盾。

### 3.3 例题题解

**例 3.1** 某系统结构图如图 3-9 所示，试选取  $\beta$  值使系统具有阻尼比  $\xi = 0.707$ ，并选取  $G_c(s)$  使得干扰  $N$  对系统输出没有影响。

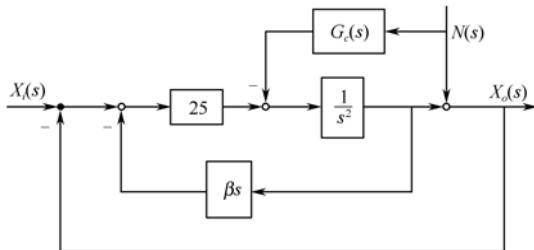


图 3-9 系统结构框图

**解** 本题属于复合控制系统，应明确前馈控制只影响传递函数的分子，对分母无影响，也就对特征方程、闭环极点无影响。本题主要解决带有干扰补偿的二阶系统的分析，以及全补偿条件下补偿装置的传递函数的计算方法。

由图 3-9 所示可得系统特征方程为

$$1 + \frac{25\beta s}{s^2} + \frac{25}{s^2} = 0 \quad \text{即} \quad s^2 + 25\beta s + 25 = 0$$

比照规格化特征方程  $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ ，可得  $\omega_n = 5$ 。

$$\beta = \frac{2\xi\omega_n}{25} = \frac{2 \times 0.707 \times 5}{25} = 0.2828$$

系统对于干扰  $N$  的输出为

$$\frac{X_o(s)}{N(s)} = \frac{1 \times (1 + \frac{25\beta s}{s^2}) + \left[ -\frac{1}{s^2} \cdot G_c(s) \right]}{1 + \frac{25\beta s}{s^2} + \frac{25}{s^2}} = \frac{s^2 + 25\beta s - G_c(s)}{s^2 + 25\beta s + 25}$$

欲使  $N(s)$  对输出  $X_o(s)$  无影响，应有  $\frac{X_o(s)}{N(s)} = 0$ 。

则

$$G_c(s) = s^2 + 25\beta s = s^2 + 7.07s$$

**例 3.2** 设某反馈系统如图 3-10 所示，试选择  $K_1$ 、 $K_2$  以使系统同时满足以下性能指标要求：（1）当单位斜坡输入时，系统的稳态误差  $e_{ss} \leq 0.35$ ；（2）闭环系统的阻尼比  $\xi \leq 0.707$ ；（3）调节时间  $t_s \leq 3$  s。

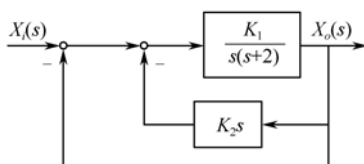


图 3-10 反馈系统

**解** 本题阐述利用测速反馈可有效改善二阶系统性能。

（1）系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{\frac{K_1}{s(s+2)}}{1 + \frac{K_1}{s(s+2)} \cdot K_2 s} = \frac{K_1}{s^2 + (2 + K_1 K_2)s}$$

闭环系统特征方程为

$$s^2 + (2 + K_1 K_2)s + K_1 = 0$$

由二阶系统稳定条件，应有：

$$\begin{cases} 2 + K_1 K_2 > 0 \\ K_1 > 0 \end{cases} \quad \text{得} \quad \begin{cases} K_1 K_2 > -2 \\ K_1 > 0 \end{cases}$$

考虑到系统为 I 型系统, 且开环增益为

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) = \frac{K_1}{2 + K_1 K_2}$$

欲使单位斜坡输入下, 系统稳态误差  $e_{ss} = \frac{1}{K} \leq 0.35$ , 则应有:

$$\frac{2 + K_1 K_2}{K_1} \leq 0.35$$

(2) 闭环系统传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \cdot \frac{K_1}{s^2 + (2 + K_1 K_2)s + K_1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + s\xi\omega_n + \omega_n^2}$$

则

$$\begin{cases} 2\xi\omega_n = 2 + K_1 K_2 \\ K_1 = \omega_n^2 \end{cases} \Rightarrow \xi = \frac{2 + K_1 K_2}{2\sqrt{K_1}}$$

(3) 调整时间  $t_s \leq 3$  s (按  $\Delta = 2\%$  计):

$$t_s = \frac{4.5}{\xi\omega_n} = \frac{4.5}{\frac{2 + K_1 K_2}{2}} \leq 3, \quad \text{则} \quad K_1 K_2 \geq 1$$

联立求解 3 个方面性能指标对  $K_1$ 、 $K_2$  的要求, 得到满足性能指标的  $K_1$ 、 $K_2$ :

$$K_1 \geq 8.571, \quad K_2 \geq 0.117$$

**例 3.3** 已知单位反馈二阶控制系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$ 。(1) 写出用阻尼

比  $\xi$  和无阻尼谐振频率  $\omega_n$  描述的闭环传递函数;(2) 若要求闭环极点配置在  $\lambda_{1,2} = -5 \pm 5\sqrt{3}j$ ,

则  $K$ 、 $T$  应取何值?

**解** 本题主要说明标准二阶系统的开环传递函数、闭环传递函数、性能参数  $\xi$ 、 $\omega_n$  及其闭环极点之间的关系。

(1) 根据题意, 该系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\frac{K}{T}}{s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{K}{T}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

得:

$$\begin{cases} \omega_n^2 = \frac{K}{T} \\ 2\xi\omega_n = \frac{1}{T} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}} \\ \xi = \sqrt{\frac{1}{4KT}} \end{cases}$$

(2) 若闭环极点配置在  $\lambda_{1,2} = -5 \pm 5\sqrt{3}j$ , 则相应的特征方程应为

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = (s + 5)^2 + (5\sqrt{3})^2 = s^2 + 10s + 100$$

比照闭环传递函数的特征方程, 得:

$$\begin{cases} \frac{1}{T} = 10 \\ \frac{K}{T} = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = 0.1 \\ K = 10 \end{cases}$$

**例 3.4** 某单位反馈系统在输入信号  $x_i(t) = 1 + t$  的作用下, 输出响应  $x_o(t) = t$ , 试求系统的开环传递函数和稳态误差。

**解** 由  $x_o(t) = t$  得  $x_o(0) = 0$ , 故  $x_o(t) = t$  是在零初始条件下的响应。

由  $x_i(t) = 1 + t$  得  $R(s) = \frac{s+1}{s^2}$ , 由  $x_o(t) = t$  得  $X_o(s) = \frac{1}{s^2}$ 。

于是:

$$\Phi(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{\frac{1}{s^2}}{\frac{s+1}{s^2}} = \frac{1}{s+1} = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s}} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

为一个单位反馈系统, 开环传递函数  $G(s) = \frac{1}{s}$ , 系统为 I 型系统, 且开环增益  $K = 1$ 。于是,

稳态误差  $e_{ss} = 0 + 1 = 1$ 。

**例 3.5** 已知系统结构框图如图 3-11 所示, 要求系统在  $x_i(t) = t^2$  作用时, 稳态误差  $e_{ss} < 0.5$ , 试确定满足要求的开环增益  $K$  的范围。

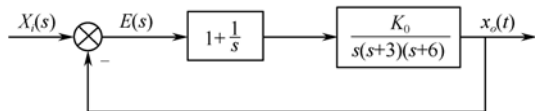


图 3-11 系统结构框图

**解** 系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_0(s+1)}{s^2(s+3)(s+6)}$$

开环增益  $K = \frac{K_0}{18}$ , 为 II 型系统, 特征方程  $D(s) = s^4 + 9s^3 + 18s^2 + K_0s + K_0 = 0$ , 劳斯列表为

$$\begin{array}{rcll}
 s^4 & 1 & 18 & K_0 \\
 s^3 & 9 & K_0 & \\
 s^2 & \frac{162 - K_0}{9} & K_0 & \\
 s^1 & \frac{(162 - K_0) K_0 - 81K_0}{9} & 0 & \\
 s^0 & K_0 & & 
 \end{array}$$

为使系统稳定, 必须满足以下条件:

$$\begin{cases} \frac{162 - K_0}{9} > 0 \\ \frac{(162 - K_0) K_0 - 81K_0}{9} > 0 \\ K_0 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_0 < 162 \\ K_0 < 81 \\ K_0 < 0 \end{cases}$$

因此, 使系统稳定的开环增益  $0 < K = \frac{K_0}{18} < 4.5$ 。

当  $x_i(t) = t^2$  时, 利用静态误差系数法, 令  $e_{ss} = \frac{A}{K} = \frac{2}{K} < 0.5$ , 有  $K > 4$ 。

综合满足稳定要求和满足误差要求的  $K$  值范围是  $4 < K < 4.5$ 。

**例 3.6** 设复合控制系统结构如图 3-12 所示。(1) 计算当  $n(t) = t$  时系统的稳态误差; (2) 设计  $k_c$ , 使系统在  $x_i(t) = t$  作用下无稳态误差。

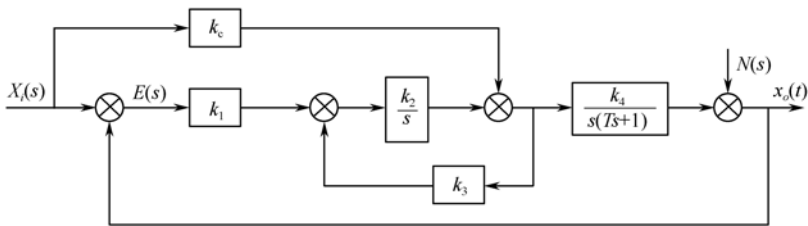


图 3-12 复合控制系统结构图

**解** 系统对干扰  $n(t) = t$  即  $N(s) = \frac{1}{s^2}$  的偏差为

$$\frac{E(s)}{N(s)} = \frac{1}{1 + k_1 \cdot \frac{k_2/s}{1 + (k_2/s) \cdot k_3} \cdot \frac{k_4}{s(Ts+1)}} = -\frac{s(Ts+1)(s+k_2k_3)}{s(s+k_2k_3)(Ts+1) + k_1k_2k_4}$$

稳态误差为

$$\begin{aligned}
 e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{E(s)}{N(s)} \cdot N(s) \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{-s(Ts+1)(s+k_2k_3)}{s(s+k_2k_3)(Ts+1) + k_1k_2k_4} \cdot \frac{1}{s^2} = -\frac{k_3}{k_1k_4}
 \end{aligned}$$

(2) 将图 3-12 等效为图 3-13。

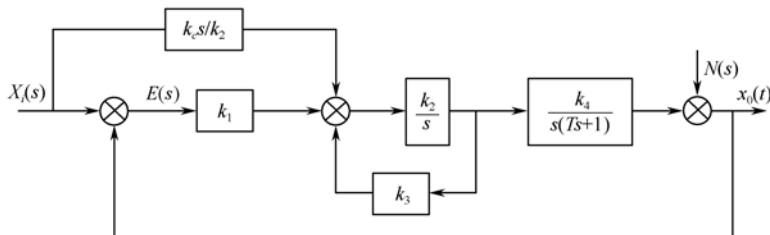


图 3-13 图 3-12 等效图

则

$$\frac{E(s)}{X_i(s)} = \frac{1 - \frac{k_c s}{k_2} \cdot \frac{k_2 k_4}{s(Ts+1)(s+k_2 k_3)}}{1 + k_1 \cdot \frac{k_2 k_4}{s(Ts+1)(s+k_2 k_3)}} = \frac{Ts^3 + (1 + k_2 k_3 T)s^2 + (k_2 k_3 - k_c k_4)s}{s(Ts+1)(s+k_2 k_3) + k_1 k_2 k_4}$$

要使系统在  $x_i(t) = t$  作用下无稳态误差，须令  $k_2 k_3 - k_c k_4 = 0$ 。

即

$$k_c = \frac{k_2 k_3}{k_4}$$

**例 3.7** 已知控制系统结构图如图 3-14 (a) 所示，其单位阶跃响应如图 3-14 (b) 所示，若要求系统的稳态位置误差  $e_{ss} = 0$ ，试确定  $K$ 、 $\nu$  和  $T$  的值。

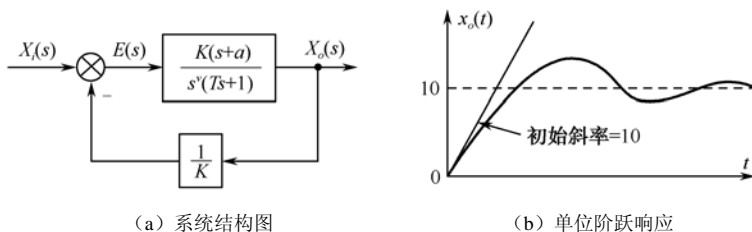


图 3-14 控制系统

**解** 由  $x_i(t) = 1(t)$  时， $e_{ss} = 0$ ，可以判定  $\nu \geq 1$ 。系统闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{\frac{K(s+a)}{s^\nu(Ts+1)}}{1 + \frac{s+a}{s^\nu(Ts+1)}} = \frac{K(s+a)}{s^\nu(Ts+1) + s+a}$$

系统单位阶跃响应收敛，系统稳定，因此必有  $\nu \leq 2$ 。根据单位阶跃响应曲线，有：

$$h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi(s) \cdot X_i(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K(s+a)}{s^\nu(Ts+1) + s+a} \cdot \frac{1}{s} = K = 10$$

$$h'(0) = k(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \Phi(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Ks^2 + aKs}{Ts^{\nu+1} + s^\nu + s+a} = 10$$

当  $T \neq 0$  时, 有:

$$k(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Ks^2}{Ts^{v+1}} = 10 \quad \text{可得} \quad \begin{cases} K = 10 \\ v = 1 \\ T = 1 \end{cases}$$

当  $T = 0$  时, 有:

$$k(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Ks^2}{s^v} = 10 \quad \text{可得} \quad \begin{cases} K = 10 \\ v = 2 \\ T = 0 \end{cases}$$

**例 3.8** 电动机控制系统如图 3-15 所示, 系统参数  $T = 0.1, J = 0.01, k_i = 10$ 。(1) 设干扰力矩  $T_d = 0$ , 输入  $\theta_r(t) = t$ , 问  $k$  和  $k_i$  值对稳态误差有何影响? (2) 设输入  $\theta_r(t) = 0$ , 当干扰力矩  $T_d$  为单位阶跃函数时,  $k$  和  $k_i$  值对稳态误差有何影响?

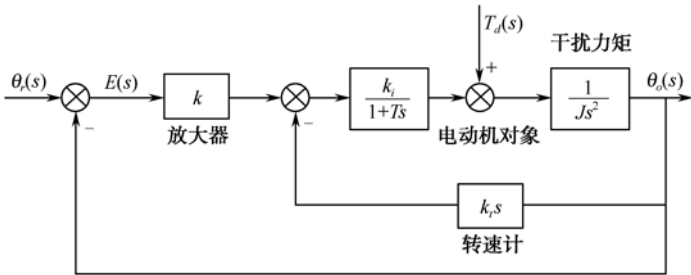


图 3-15 电动机控制系统结构图

**解** (1) 由于  $T_d(s) = 0$  且  $\theta_r(s) = \frac{1}{s^2}$ , 由输入引起的误差传递函数为

$$\frac{E(s)}{\theta_r(s)} = \frac{Js^2(1+Ts) + k_i k_i s}{Js^2(1+Ts) + k_i k_i s + k k_i}$$

稳态误差为

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Js^2(1+Ts) + k_i k_i s}{Js^2(1+Ts) + k_i k_i s + k k_i} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{k_i}{k}$$

可见, 稳态误差  $e_{ssr}$  与  $k_i$  成正比。当  $k_i$  增大时, 稳态误差增大, 而动态指标超调量和调整时间减小。也就是说, 为了改善动态性能指标而调整系统参数, 有时会牺牲稳态指标。

(2)  $\theta_r(s) = 0$  且  $T_d(s) = \frac{1}{s}$ , 干扰与输出之间的传递函数为

$$\frac{\theta_o(s)}{T_d(s)} = \frac{\frac{1}{Js^2}}{1 + \frac{k_i}{1+Ts} \cdot \frac{1}{Js^2} \cdot k_i s + k \cdot \frac{k_i}{1+Ts} \cdot \frac{1}{Js^2}}$$



稳态误差为

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s E_n(s) = - \frac{\frac{1}{Js^2}}{1 + \frac{k_i}{1+Ts} \cdot \frac{1}{Js^2} \cdot k_t s + k \cdot \frac{k_i}{1+Ts} \cdot \frac{1}{Js^2}} \cdot \frac{1}{s} = - \frac{1}{10k}$$

可见，稳态误差  $e_{ssn}$  与  $k$  成正比，与  $k_t$  无关。但  $k_t$  的取值应满足系统的稳定性条件。系统的特征方程为

$$0.001s^3 + 0.01s^2 + 10k_t s + 10k = 0$$

劳斯列表为

$s^3$	0.001	$10k_t$
$s^2$	0.01	$10k$
$s^1$	$10k_t - k$	0
$s^0$	$k$	

由稳定性条件，要求  $k > 0$ ， $k_t > 0.1k$ 。

**例 3.9** 某单位反馈系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{1}{s(0.5s+1)(0.2s+1)}$ 。(1) 确定其闭环主

导极点；(2) 确定由主导极点所决定的  $\xi$ 、 $\omega_n$  值。

**解** (1) 根据闭环主导极点的定义，需对系统特征方程求解，解得全部闭环极点，然后求离虚轴最近的闭环极点的实部与其他远离虚轴的闭环极点实部的比值。如果所得比值小于或等于  $\frac{1}{5}$ ，且在离虚轴最近的闭环极点附近不存在闭环零点，那么这个离虚轴最近的闭环极点就可确定为系统的闭环主导极点，它常以共轭复数对的形式出现。为求得全部闭环极点，需首先求系统的闭环传递函数：

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{1}{1+s(0.5s+1)(0.2s+1)} = \frac{10}{s^3+7s^2+10s+10}$$

特征方程为

$$D(s) = s^3 + 7s^2 + 10s + 10 = (s + 5.52)(s^2 + 1.48s + 1.834) = 0$$

由特征方程解得系统的 3 个闭环极点为

$$s_{1,2} = -0.74 \pm 1.01326j, \quad s_3 = -5.52$$

$$\frac{\operatorname{Re} s_{1,2}}{\operatorname{Re} s_3} = \frac{-0.74}{-5.52} = 0.134 < \frac{1}{5}$$

因此，确定  $s_{1,2}$  为该系统的闭环主导极点。

(2) 闭环主导极点的标准形式是  $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ ，与所求得的闭环主导极点比较，得：

$$\begin{cases} \xi\omega_n = 0.74 \\ \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 1.1326 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} \xi = 0.547 \\ \omega_n = 1.35 \end{cases}$$

**例 3.10** 具有一定质量的某部件在外力作用下的动态结构如图 3-16 所示。图中  $Z_i(s)$  为外力， $Z_o(s)$  为位移； $m$ 、 $f$ 、 $K$  分别为运动体的质量、阻尼系数和弹性系数。试分析动力学系统参数对阶跃响应性能的影响，并求系统具有最佳阻尼比（ $\xi = 0.7$ ）时参数应满足的条件。

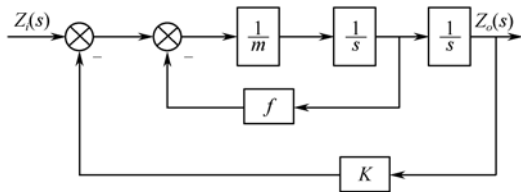


图 3-16 系统动态结构图

**解** 用化简框图求得系统的传递函数：

$$\Phi(s) = \frac{Z_o(s)}{Z_i(s)} = \frac{\frac{1}{ms^2}}{1 + \frac{f}{ms} + \frac{K}{ms^2}} = \frac{1}{ms^2 + fs + K} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{fs}{m} + \frac{K}{m}}$$

对照标准式，可得  $\omega_n = \sqrt{K/m}$ ， $\xi = f/(2\sqrt{Km})$ 。

要求响应有较好的平稳性，应使  $\xi$  加大，即加大阻尼  $f$ ，减小质量  $m$ （ $k$  一般由静态性能决定）；要求响应有较好的快速性，应使  $s[(L_a s + R_a J)(Js + f) + C_m K_b] + K_s K_A C_m / i = 0$  加大，即减小  $m$ 。

总的要求是  $m$  小、 $f$  大，故技术上常采用轻型材料或空心结构减小质量，而采用加大阻尼面积或安置空气阻尼片、液压阻尼器及磁涡流板等措施提高阻尼系数。

要求系统具有最佳阻尼比，应取：

$$s[(L_a s + R_a J)(Js + f) + C_m K_b] + K_s K_A C_m / i = 0 = 0.7$$

即参数间应保持  $s[(L_a s + R_a J)(Js + f) + C_m K_b] + K_s K_A C_m / i = 0$

### 3.4 习题解析

**题 3.1** 已知系统脉冲响应  $x(t) = 0.0125e^{-1.25t}$ ，试求系统闭环传递函数  $X(s)$ 。

**【解析】** 根据拉普拉斯的衰减定理对系统的脉冲响应求拉普拉斯变换，求得系统的闭环传递函数。

**解** 根据拉普拉斯的衰减定理，可得：

$$X(s) = L[x(t)] = \frac{0.0125}{s + 1.25}$$

**题 3.2** 在单位阶跃输入下测得某伺服机构的响应为

$$x_o(t) = 1 + 0.2e^{-60t} - e^{-10t} \quad (t \geq 0)$$

试求：(1) 闭环传递函数；(2) 系统的无阻尼自然频率及阻尼比。

**【解析】** 对单位阶跃响应求和输入分别求拉普拉斯变换，求得系统传递函数。根据二阶系统规格化表达式求得系统的无阻尼自然频率和阻尼比。

**解** 因为  $x_o(t) = 1 + 0.2e^{-60t} - e^{-10t}$ ， $X_o(s) = \frac{1}{s} + \frac{0.2}{s+60} - \frac{1}{s+10}$ ，且  $x_i(t) = 1$ ， $X_i = \frac{1}{s}$ 。

该系统的闭环传递函数为

$$G_B(s) = X_o(s) / X_i(s) = \left( \frac{1}{s} + \frac{0.2}{s+60} - \frac{1}{s+10} \right) / \frac{1}{s} = \frac{600}{s^2 + 70s + 600}$$

系统为一个典型二阶系统：

$$\omega_n^2 = 600, \quad 2\xi\omega_n = 70$$

$$\omega_n = \sqrt{600} = 24.5s^{-1}, \quad \xi = 1.43$$

**题 3.3** 二阶系统在[s]复平面中有一对共轭复数极点，试在[s]复平面中画出与下列指标相应的极点可能分布的区域：

- (1)  $\xi \geq 0.707$ ， $\omega_n > 2 \text{ rad/s}$ ；
- (2)  $0 \leq \xi \leq 0.707$ ， $\omega_n \leq 2 \text{ rad/s}$ ；
- (3)  $0 \leq \xi \leq 0.5$ ， $2 \text{ rad/s} \leq \omega_n \leq 4 \text{ rad/s}$ ；
- (4)  $0.5 \leq \xi \leq 0.707$ ， $\omega_n \leq 2 \text{ rad/s}$ 。

**【解析】** 根据二阶系统的  $\xi, \omega_n$  范围在复平面上画出系统的极点配置的分布区域。

**解** 结果如图 3-17 所示。

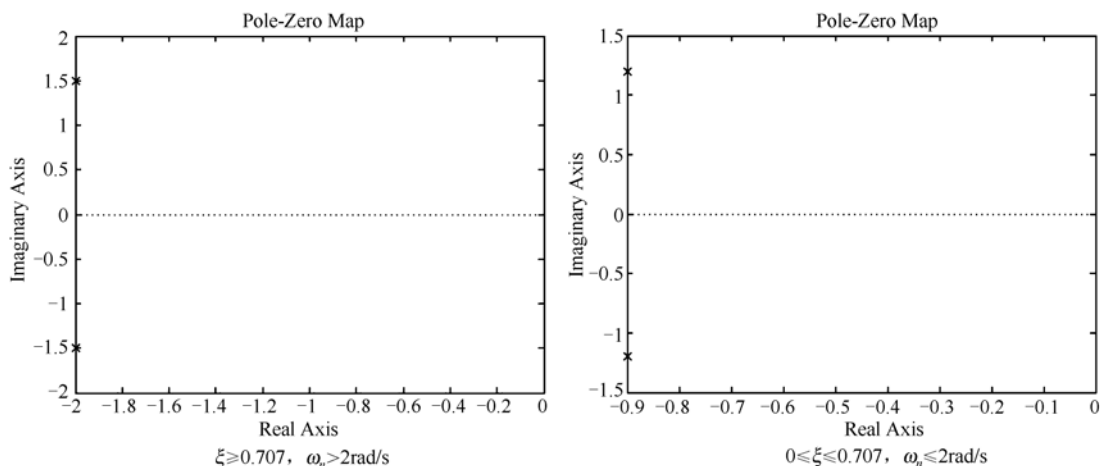


图 3-17 系统的极点配置的分布区域

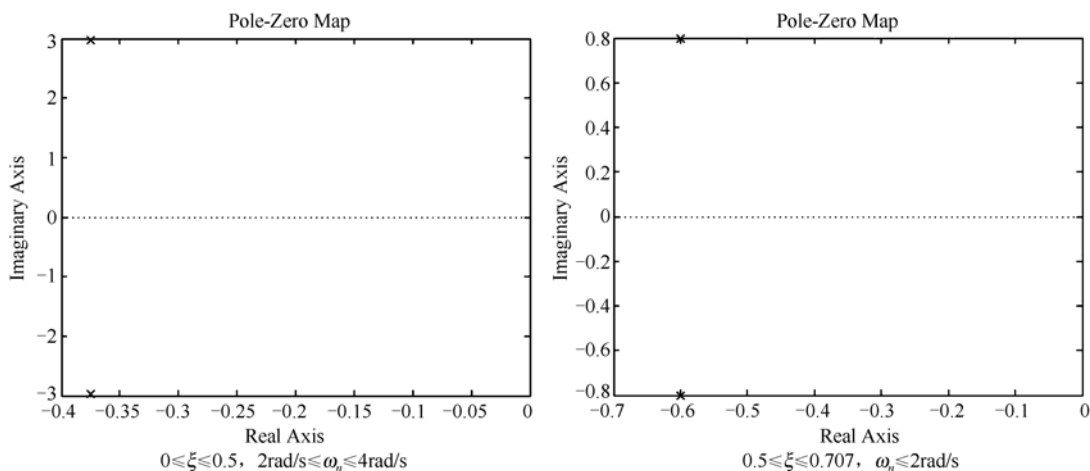


图 3-17 系统的极点配置的分布区域 (续)

**题 3.4** 一阶系统结构图如图 3-18 所示。要求系统闭环增益  $K=2$ ，调节时间  $t_s \leq 0.4\text{ s}$ ，试确定参数  $K_1$ 、 $K_2$  的值。

**【解析】** 由系统的框图化简求得系统闭环传递函数，并表示为规格化形式，根据闭环增益  $K$  求得  $K_2$ ，根据  $t_s$  求得  $K_1$ 。

**解** 由系统结构图写出闭环系统传递函数：

$$G(s) = \frac{\frac{K_1}{s}}{1 + \frac{K_1 K_2}{s}} = \frac{K_1}{s + K_1 K_2} = \frac{\frac{1}{K_2}}{\frac{s}{K_1 K_2} + 1}$$

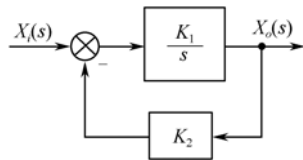


图 3-18 系统结构图

令闭环增益  $K = \frac{1}{K_2} = 2$ ，得  $K_2 = 0.5$ 。

令调节时间  $t_s = 3T = \frac{3}{K_1 K_2} \leq 0.4$ ，得  $K_1 \geq 15$ 。

**题 3.5** 在许多化学过程中，反应槽内的温度要保持恒定，图 3-19 (a)、(b) 所示分别为开环和闭环温度控制系统结构框图，两种系统正常的  $K$  值为 1。(1) 若  $x_i(t) = 1(t)$ ， $n(t) = 0$ ，两种系统从响应开始达到稳态温度值的 63.2% 各需多长时间；(2) 当有阶跃扰动  $n(t) = 0.1$  时，求扰动对两种系统的温度的影响。

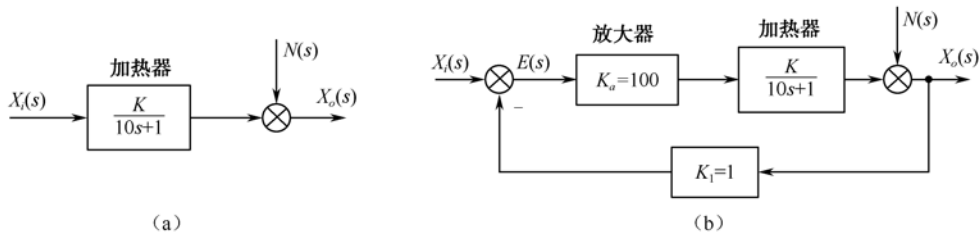


图 3-19 温度控制系统结构框图

【解析】根据系统的框图求得系统闭环传递函数，根据系统的传递函数和已知参数求得系统从响应开始升到稳态温度的 63.2% 所需多长时间；再根据系统的传递函数求得当有阶跃扰动对系统的温度的影响。

解 (1) 对于开环系统：

$$G_a(s) = \frac{K}{10s+1} = \frac{1}{10s+1}, \quad \text{时间常数 } T = 10$$

因为  $h(T) = 0.632$ ，则系统达到稳态温度值的 63.2% 需要 10 个单位时间。

对于闭环系统：

$$G_b(s) = \frac{100}{10s+101} = \frac{\frac{100}{101}}{\frac{10}{101}s+1}, \quad \text{时间常数 } T = \frac{10}{101}$$

因为  $h(T) = 0.632$ ，则闭环系统达到稳态温度值的 63.2% 需要 0.099 个单位时间。

(2) 对于开环系统：

$$G_{an}(s) = \frac{Z_{o1}(s)}{N(s)} = 1$$

$n(t) = 0.1$  时，该扰动影响将一直保持。

对于闭环系统：

$$G_{bn}(s) = \frac{Z_{o2}(s)}{N(s)} = \frac{1}{1 + \frac{100}{10s+1}} = \frac{10s+1}{10s+101}$$

$n(t) = 0.1$  时，最终扰动影响为  $0.1 \times \frac{1}{101} \approx 0.001$ 。

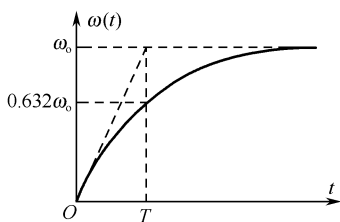


图 3-20 转速时间曲线

题 3.6 测定直流电动机传递函数的一种方法是给电枢加一定电压，保持励磁电流不变，测出电动机的稳态转速。另外要记录电动机从静止到速度为稳态值 50% 或 63.2% 所需的时间，利用转速时间曲线（如图 3-20 所示）和所测数据，并假设传递

函数为  $G(s) = \frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{K}{s(s+a)}$ ，可求得  $K$  和  $a$  的值。

若实测结果是：加 10V 电压可得 1200 r/min 的稳态转速，而达到该值 50% 的时间为 1.2s，试求电动机传递函数。其中  $\omega(t) = d\theta/dt$ ，单位是 rad/s。

【解析】根据系统的传递函数和已知量数据，由极值定理求得系统的  $K$  值和  $a$  值。

解 依题意有： $v(t) = 10$  (V)

$$\omega(\infty) = \frac{1200 \times 2\pi}{60} = 40\pi \text{ rad/s} \quad (1)$$

$$\omega(1.2) = 0.5\omega(\infty) = 20\pi \text{ rad/s} \quad (2)$$

设系统传递函数为  $G_0(s) = \frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{K}{s+a}$

$$\text{应有: } \omega(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_0(s) \cdot V(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{10}{s} \cdot \frac{K}{s+a} = \frac{10K}{a} = 40\pi \quad (3)$$

$$\omega(t) = L^{-1}[G_0(s) \cdot V(s)] = L^{-1}\left[\frac{10K}{s(s+a)}\right] = \frac{10K}{a} L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right] = \frac{10K}{a} [1 - e^{-at}]$$

$$\text{由式 (2)、式 (3)} \quad \omega(1.2) = \frac{10K}{a} [1 - e^{-1.2a}] = 40\pi [1 - e^{-1.2a}] = 20\pi$$

$$\text{得:} \quad 1 - e^{-1.2a} = 0.5$$

$$\text{解出:} \quad a = \frac{-\ln 0.5}{1.2} = 0.5776 \quad (4)$$

$$\text{将式 (4) 代入式 (3) 得:} \quad K = 4\pi a = 7.2586$$

**题 3.7** 单位反馈系统的开环传递函数  $G(s) = \frac{4}{s(s+5)}$ , 求单位阶跃响应  $u(t)$  和调节时间  $t_s$ 。

**【解析】** 根据系统的开环传递函数求得系统闭环传递函数, 再根据系统的闭环传递函数求得系统的单位阶跃输出, 对系统的输出进行拉普拉斯逆变换求得系统的单位阶跃响应  $u(t)$  及调节时间  $t_s$ 。

**解** 依题, 系统闭环传递函数为

$$G_B(s) = \frac{4}{s^2 + 5s + 4} = \frac{4}{(s+1)(s+4)} = \frac{4}{(s+\frac{1}{T_1})(s+\frac{1}{T_2})} \quad \text{联立求得} \quad \begin{cases} T_1 = 1 \\ T_2 = 0.25 \end{cases}$$

$$X_o(s) = G_B(s) X_i(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+4)} = \frac{C_0}{s} + \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s+4}$$

$$C_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s G_B(s) X_i(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{4}{(s+1)(s+4)} = 1$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) G_B(s) X_i(s) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{4}{s(s+4)} = -\frac{4}{3}$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow -4} (s+4) G_B(s) X_i(s) = \lim_{s \rightarrow -4} \frac{4}{s(s+1)} = \frac{1}{3}$$

$$u(t) = 1 - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t}$$

$$\text{因为 } \frac{T_1}{T_2} = 4, \text{ 所以 } t_s = \left(\frac{t_s}{T_1}\right) T_1 = 3.3 T_1 = 3.3。$$

**题 3.8** 设角速度指示随动系统结构图如图 3-21 所示。若要求系统单位阶跃响应无超调, 且调节时间尽可能短, 问开环增益  $K$  应取何值, 调节时间  $t_s$  是多少?

**【解析】** 根据系统框图求得系统闭环传递函数, 列出系统闭环特征多项式, 求得  $T_0$  和  $K$ , 根据  $T_0$  求得调节时间  $t_s$ 。

**解** 写出系统闭环传递函数:

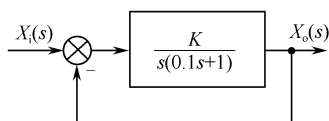


图 3-21 角速度指示随动系统结构图

$$G_B(s) = \frac{10K}{s^2 + 10s + 10K}$$

闭环特征多项式为

$$D(s) = s^2 + 10s + 10K = \left(s + \frac{1}{T_0}\right)^2 = s^2 + \frac{2}{T_0}s + \left(\frac{1}{T_0}\right)^2$$

$$\text{比较系数有} \begin{cases} \frac{2}{T_0} = 10 \\ \left(\frac{1}{T_0}\right)^2 = 10K \end{cases}, \text{联立求解得} \begin{cases} T_0 = 0.2 \\ K = 2.5 \end{cases}$$

 因此有  $t_s = 4.75T_0 = 0.95$ 。

**题 3.9** 给定典型二阶系统的设计指标：超调量  $M_p \leq 5\%$ ，调节时间  $t_s < 3s$ ，峰值时间  $t_p < 1s$ ，试确定系统极点配置的区域，以获得预期的响应特性。

**【解析】**由典型二阶系统性能指标的各个公式，联立求解确定系统极点的配置区域。

**解** 依题可得：

$$M_p \leq 5\%, \Rightarrow \xi \geq 0.707 \quad (\beta \leq 45^\circ);$$

$$t_s = \frac{3.5}{\xi \omega_n} < 3, \Rightarrow \xi \omega_n > 1.17;$$

$$t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2} \omega_n} < 1, \Rightarrow \sqrt{1-\xi^2} \omega_n > 3.14$$

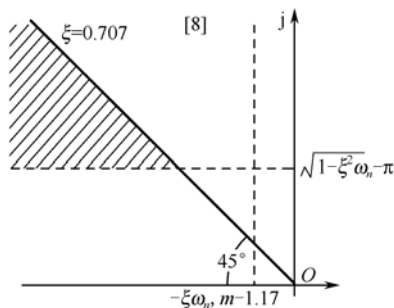


图 3-22 特征根区域

综合以上条件可画出满足要求的特征根区域如图 3-22 所示。

**题 3.10** 电子心脏起搏器心律控制系统结构图如图 3-23 所示，其中模仿心脏的传递函数相当于一个纯积分环节。

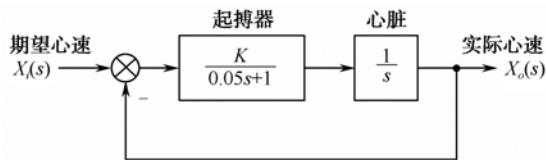


图 3-23 电子心律起搏器系统框图

(1) 若  $\xi = 0.5$  对应最佳响应，问起搏器增益  $K$  应取多大？

(2) 若期望心速为 60 次/min，并突然接通起搏器，问 1s 后实际心速为多少？瞬时最大心速多大？

**【解析】**根据系统框图求得系统的传递函数，根据典型二阶系统求得起搏器增益，当  $t=1s$  时根据二阶系统的阶跃响应公式求得 1s 后实际心速和瞬间最大心速。

解 依题意, 系统传递函数为

$$G(s) = \frac{\frac{K}{0.05}}{s^2 + \frac{1}{0.05}s + \frac{K}{0.05}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \text{ 联立求得 } \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{K}{0.05}} \\ \xi = \frac{1}{0.05 \times 2\omega_n} \end{cases}$$

令  $\xi = 0.5$  可解出  $\begin{cases} K = 20 \\ \omega_n = 20 \end{cases}$

将  $t = 1s$  代入二阶系统阶跃响应公式

$$h(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \beta)$$

可得:  $h(1) = 1.000024 \text{ 次/s} = 60.00145 \text{ 次/min}$ 。

$\xi = 0.5$  时, 系统超调量  $M_p = 16.3\%$ , 最大心速为

$$h(t_p) = 1 + 0.163 = 1.163 \text{ 次/s} = 69.78 \text{ 次/min}$$

**题 3.11** 机器人控制系统结构图如图 3-24 所示。试确定参数  $K_1$ 、 $K_2$  值, 使系统阶跃响应的峰值时间  $t_p = 0.5s$ , 超调量  $M_p = 2\%$ 。

**【解析】** 根据系统的框图求得系统的传递函数, 与规格化表达式比较获得二阶系统的特征参数, 再通过二阶系统的特征参数确定  $K_1$  和  $K_2$ 。

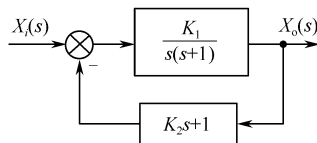


图 3-24 机器人位置控制系统

解 依题意, 系统传递函数为

$$G(s) = \frac{\frac{K_1}{s(s+1)}}{1 + \frac{K_1(K_2s+1)}{s(s+1)}} = \frac{K_1}{s^2 + (1+K_1K_2)s + K_1} = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega + \omega^2}$$

$$G(s) = \frac{\frac{K_1}{s(s+1)}}{1 + \frac{K_1(K_2s+1)}{s(s+1)}} = \frac{K_1}{s^2 + (1+K_1K_2)s + K_1} = \frac{K\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega + \omega^2}$$

由

$$\begin{cases} M_p = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \leq 0.02 \\ t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\omega_n} = 0.5 \end{cases} \quad \text{联立求解得} \quad \begin{cases} \xi = 0.78 \\ \omega_n = 10 \end{cases}$$

比较  $G(s)$  分母系数得:



$$\begin{cases} K_1 = \omega_n^2 = 100 \\ K_2 = \frac{2\xi\omega_n - 1}{K_1} = 0.146 \end{cases}$$

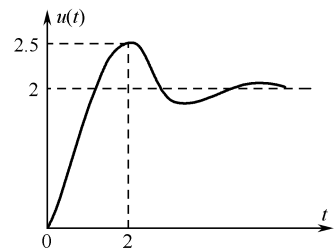


图 3-25 系统的单位阶跃响应

**题 3.12** 某典型二阶系统的单位阶跃响应如图 3-25 所示。试确定系统的闭环传递函数。

**【解析】** 列出典型二阶系统的传递函数方程，根据单位二阶系统的单位阶跃曲线求得典型二阶系统的特征参数，从而求得该系统的传递函数。

**解** 依题意，系统闭环传递函数形式应为

$$G(s) = \frac{K_\phi \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

由阶跃响应曲线有：

$$h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) X_i(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) \cdot \frac{1}{s} = K_\phi = 2$$

$$\begin{cases} t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 2 \\ M_p = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2.5-2}{2} = 25\% \end{cases}$$

联立求解得：

$$\begin{cases} \xi = 0.404 \\ \omega_n = 1.717 \end{cases}$$

所以有：

$$G_B(s) = \frac{2 \times 1.717^2}{s^2 + 2 \times 0.404 \times 1.717 s + 1.717^2} = \frac{5.9}{s^2 + 1.39 s + 2.95}$$

**题 3.13** 设图 3-26 (a) 所示系统的单位阶跃响应如图 3-26 (b) 所示。试确定系统的参数  $K_1$ 、 $K_2$  和  $a$ 。

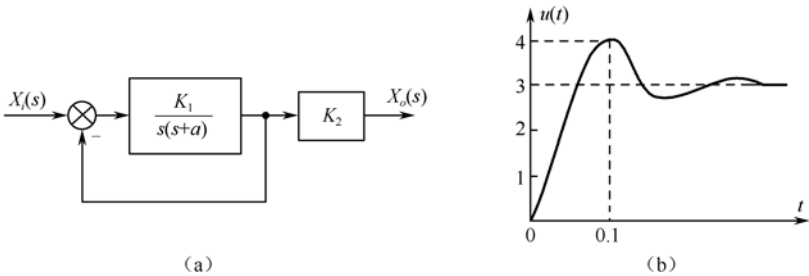


图 3-26 系统结构框图及单位阶跃响应曲线

**【解析】**根据框图列出系统的传递函数，根据单位二阶系统的单位阶跃曲线求得典型二阶系统的特征参数，从而求得该系统的参数  $K_1$ 、 $K_2$  和  $a$ 。

**解** 由系统阶跃响应曲线有：

$$\begin{cases} h(\infty) = 3 \\ t_p = 0.1 \\ M_p = (4 - 3)/3 = 33.3\% \end{cases}$$

系统闭环传递函数为

$$G_B(s) = \frac{K_1 K_2}{s^2 + as + K_1} = \frac{K_2 \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \tag{1}$$

由

$$\begin{cases} t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\omega_n} = 0.1 \\ M_p = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} = 33.3\% \end{cases}, \text{联立求解得} \begin{cases} \xi = 0.33 \\ \omega_n = 33.28 \end{cases}$$

由式 (1) 求得  $\begin{cases} K_1 = \omega_n^2 = 1108 \\ a = 2\xi\omega_n = 22 \end{cases}$

另外  $h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_B(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_1 K_2}{s^2 + as + K_1} = K_2 = 3$ 。

**题 3.14** 图 3-27 所示是电压测量系统，输入电压  $e(t)$ ，输出位移  $y(t)$ ，放大器增益  $K = 10$ ，丝杠螺距 1mm，电位计滑臂每移动 1cm 电压增量为 0.4V。当对电动机加 10V 阶跃电压时（带负载）稳态转速为 1000 r/min，达到该值 63.2% 需要 0.5s。画出系统框图，求出传递函数  $Y(s)/E(s)$ ，并求系统单位阶跃响应的峰值时间  $t_p$ 、超调量  $M_p$ 、调节时间  $t_s$  和稳态值  $u(\infty)$ 。

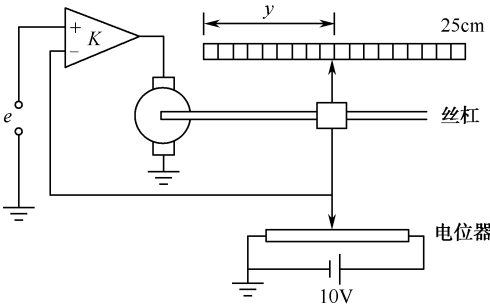


图 3-27 电压测量系统

**【解析】**根据系统的工作原理，画出系统的结构图，根据结构图写出系统的传递函数，把该系统传递函数化为典型二阶系统的形式，从而求得系统单位阶跃响应的峰值时间、超调量、调节时间和稳态值。

解 依题意可列出各环节传递函数如下:

比较环节  $E(s) = E_i(s) - F(s)$  (V)

放大器  $\frac{U_a(s)}{E(s)} = K = 10$

电动机  $\frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{K_m}{T_m s + 1} = \frac{1000}{10 \times 60} = \frac{5/3}{0.5s + 1}$  (r/sim)

丝杠  $\frac{Y(s)}{\Theta(s)} = K_1 = 0.1$  (cm/r)

电位器  $\frac{F(s)}{Y(s)} = K_2 = 0.4$  (V/cm)

画出系统结构图如图 3-28 所示。

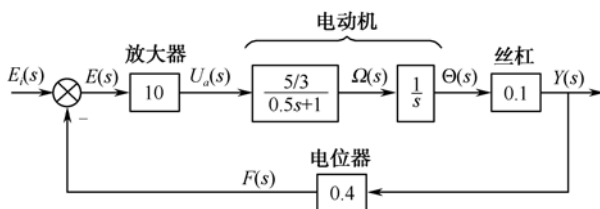


图 3-28 系统结构图

系统的闭环传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E_i(s)} = \frac{10}{s^2 + 2s + \frac{4}{3}} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \xi = \frac{2}{2\omega_n} = 0.866 \end{cases}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2} \omega_n} = 5.44''$$

$$M_p = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} = 0.433\%$$

$$t_s = \frac{3.5}{\xi\omega_n} = 3.5''$$

$$u(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) \cdot \frac{1}{s} = 2.5$$

题 3.15 已知系统的特征方程, 试判别系统的稳定性, 并确定在右半  $s$  平面根的个数及纯虚根。

(1)  $B(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10 = 0$

(2)  $B(s) = s^5 + 3s^4 + 12s^3 + 24s^2 + 32s + 48 = 0$

$$(3) B(s) = s^5 + 2s^4 - s - 2 = 0$$

$$(4) B(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

【解析】列出劳斯表，劳斯表中第一列各元符号改变的次数等于系统特征方程具有正实部特征根的个数。

解 (1)  $B(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10 = 0$

劳斯表:	$s^5$	1	2	11
	$s^4$	2	4	10
	$s^3$	$\varepsilon$	6	
	$s^2$	$4\varepsilon - 12/\varepsilon$	10	
	$s^1$	6		
	$s^0$	10		

第一列元素变号两次，有两个正根。

$$(2) B(s) = s^5 + 3s^4 + 12s^3 + 24s^2 + 32s + 48 = 0$$

劳斯表:	$s^5$	1	12	32
	$s^4$	3	24	48
	$s^3$	$\frac{3 \times 12 - 24}{3} = 4$	$\frac{32 \times 3 - 48}{3} = 16$	0
	$s^2$	$\frac{4 \times 24 - 3 \times 16}{4} = 12$	48	
	$s^1$	$\frac{12 \times 16 - 4 \times 48}{12} = 0$	0	

辅助方程:  $12s^2 + 48 = 0$ ,

$$s^1 \quad 24$$

辅助方程求导:  $24s = 0$

$$s^0 \quad 48$$

系统没有正根。对辅助方程求解，得到系统一对虚根:  $s_{1,2} = \pm 2j$ 。

$$(3) B(s) = s^5 + 2s^4 - s - 2 = 0$$

劳斯表:	$s^5$	1	0	-1
	$s^4$	2	0	-2

辅助方程:  $2s^4 - 2 = 0$

$$s^3 \quad 8 \quad 0$$

辅助方程求导:  $8s^3 = 0$

$$s^2 \quad \varepsilon \quad -2$$

$$s^1 \quad 16/\varepsilon$$

$$s^0 \quad -2$$

第一列元素变号一次，有 1 个正根；由辅助方程  $2s^4 - 2 = 0$  可解出：

$$2s^4 - 2 = 2(s+1)(s-1)(s+j)(s-j)$$

$$B(s) = s^5 + 2s^4 - s - 2 = (s+2)(s+1)(s-1)(s+j)(s-j)$$

$$(4) B(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

劳斯表:	$s^5$	1	24	-25
	$s^4$	2	48	-50

$$\text{辅助方程: } 2s^4 + 48s^2 - 50 = 0$$

	$s^3$	8	96
--	-------	---	----

$$\text{辅助方程求导: } 8s^3 + 96s = 0$$

	$s^2$	24	-50
--	-------	----	-----

	$s^1$	338/3
--	-------	-------

	$s^0$	-50
--	-------	-----

第一列元素变号一次, 有 1 个正根; 由辅助方程  $2s^4 + 48s^2 - 50 = 0$  可解出:

$$2s^4 + 48s^2 - 50 = 2(s+1)(s-1)(s+5j)(s-5j)$$

$$B(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = (s+2)(s+1)(s-1)(s+5j)(s-5j)$$

**题 3.16** 图 3-29 所示是某垂直起降飞机的高度控制系统结构图, 试确定使系统稳定的  $K$  值范围。

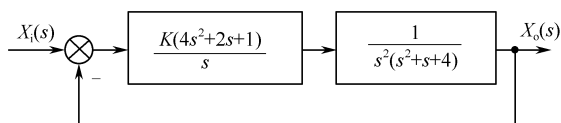


图 3-29 高度控制系统结构图

**【解析】** 根据框图列出系统传递函数, 根据传递函数列出系统特征方程。根据劳斯判据保证系统稳定的情况下确定  $K$  的取值范围。

**解** 由结构图可得系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(4s^2 + 2s + 1)}{s^3(s^2 + s + 4)}, \text{ 联立求得 } \begin{cases} K_k = K/4 \\ v = 3 \end{cases}$$

$$B(s) = s^5 + s^4 + 4s^3 + 4Ks^2 + 2Ks + K = 0$$

劳斯表:	$s^5$	1	4	$2K$	
	$s^4$	1	$4K$	$K$	
	$s^3$	$-4(1-K)$	$K$		$\Rightarrow K < 1$
	$s^2$	$\frac{(15-16K)K}{4(1-K)}$	$K$		$\Rightarrow K > 16/15 = 1.067$
	$s^1$	$\frac{-32K^2 + 47K - 16}{4(1-K)}$			$\Rightarrow 0.536 < K < 0.933$
	$s^0$	$K$			$\Rightarrow K > 0$

所以, 使系统稳定的  $K$  值范围是:  $0.536 < K < 0.933$ 。

**题 3.17** 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)(s+5)}$$

系统特征根的实部不大于 $-1$ ，试确定开环增益 $K$ 的取值范围。

**【解析】**根据系统传递函数列出系统特征方程。根据劳斯判据保证系统稳定的情况下确定 $K$ 取范围。

**解** 系统开环增益 $K_k = K/15$ 。特征方程为

$$B(s) = s^3 + 8s^2 + 15s + K = 0$$

做代换  $s = s' - 1$  可得：

$$B(s') = (s' - 1)^3 + 8(s' - 1)^2 + 15(s' - 1) + K = s'^3 + 5s'^2 + 2s' + (K - 8) = 0$$

劳斯表：	$s^3$	1	2	
	$s^2$	5	$K-8$	
	$s^1$	$\frac{18-K}{5}$		$\Rightarrow K < 18$
	$s^0$	$K-8$		$\Rightarrow K > 8$

使系统稳定的开环增益范围为  $\frac{8}{15} < K_k = \frac{K}{15} < \frac{18}{15}$ 。

**题 3.18** 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(Ts+1)(2s+1)}$$

试在满足 $T > 0, K > 1$ 的条件下，确定使系统稳定的 $T$ 和 $K$ 的取值范围，并以 $T$ 和 $K$ 为坐标画出使系统稳定的参数区域图。

**【解析】**根据传递函数列出系统特征方程。根据劳斯判据保证系统稳定的情况下确定 $K$ 取范围，并为画出以 $T$ 和 $K$ 为坐标使系统稳定的参数区域图。

**解** 特征方程为

$$B(s) = 2Ts^3 + (2+T)s^2 + (1+K)s + K = 0$$

劳斯表：	$s^3$	$2T$	$1+K$	$\Rightarrow T > 0$
	$s^2$	$2+T$	$K$	$\Rightarrow T > -2$
	$s^1$	$1+K - \frac{2TK}{2+T}$		$\Rightarrow T < 2 + \frac{4}{K-1}$
	$s^0$	$K$		$\Rightarrow K > 0$

综合所得条件，当 $K > 1$ 时，使系统稳定的参数取值范围如图 3-30 中阴影部分所示。

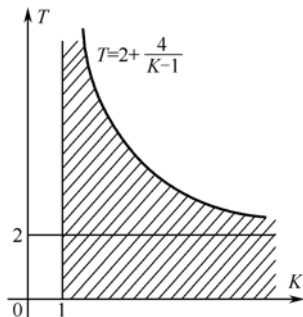


图 3-30 使系统稳定的参数区域图

**题 3.19** 温度计的传递函数为  $\frac{1}{Ts+1}$ ，用其测量容器内的水温，1min 才能显示出该温度的 98% 的数值。若加热容器使水温以  $10^{\circ}\text{C}/\text{min}$  的速度匀速上升，问温度计的稳态指示误差有多大？

**【解析】** 根据温度计的传递函数和给定参数，求得  $T$  及温度计开环传递函数，用静态误差系数法求得温度计稳态指示误差。

**解法一** 依题意，温度计闭环传递函数为

$$G_B(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

由一阶系统阶跃响应特性可知： $h(4T) = 98\%$ ，因此有  $4T = 1 \text{ min}$ ，得出  $T = 0.25 \text{ min}$ 。视温度计为单位反馈系统，则开环传递函数为

$$G_K(s) = \frac{G_B(s)}{1 - G_B(s)} = \frac{1}{Ts} \text{, 联立求得 } \begin{cases} K = 1/T \\ v = 1 \end{cases}$$

用静态误差系数法，当  $r(t) = 10t$  时， $e_{ss} = \frac{10}{K} = 10T = 2.5^{\circ}\text{C}$ 。

**解法二** 依题意，系统误差定义为  $e(t) = x_i(t) - x_o(t)$ ，应有：

$$G_e(s) = \frac{E(s)}{X_i(s)} = 1 - \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = 1 - \frac{1}{Ts+1} = \frac{Ts}{Ts+1}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s G_e(s) X_i(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Ts}{Ts+1} \cdot \frac{10}{s^2} = 10T = 2.5^{\circ}\text{C}$$

**题 3.20** 系统结构框图如图 3-31 所示。试求局部反馈加入前后系统的静态位置误差系数、静态速度误差系数和静态加速度误差系数。

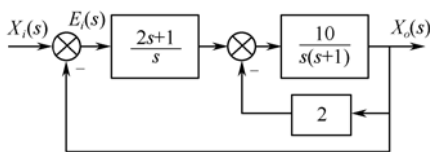


图 3-31 系统构框图

**【解析】** 根据系统的框图列出系统加入局部反馈前后的开环传递函数，根据开环传递函数求得系统的静态位置误差系数、静态速度误差系数和静态加速度误差系数。

**解** 局部反馈加入前，系统开环传递函数为

$$G_K(s) = \frac{10(2s+1)}{s^2(s+1)}$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \infty$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 10$$

局部反馈加入后, 系统开环传递函数为

$$G_K(s) = \frac{2s+1}{s} \cdot \frac{\frac{10}{s(s+1)}}{1 + \frac{20}{(s+1)}} = \frac{10(2s+1)}{s(s^2+s+20)}$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 0.5$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 0$$

**题 3.21** 系统结构框图如图 3-32 所示。已知  $r(t) = n_1(t) = n_2(t) = 1(t)$ , 试分别计算  $r(t)$ 、 $n_1(t)$  和  $n_2(t)$  作用时的稳态误差, 并说明积分环节设置位置对减小输入和干扰作用下的稳态误差的影响。

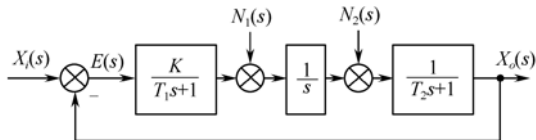


图 3-32 系统结构框图

**【解析】** 根据系统框图列出系统传递函数, 根据传递函数求得系统的  $r(t)$ 、 $n_1(t)$  和  $n_2(t)$  作用时的稳态误差。

解  $G(s) = \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$ , 联立求得  $\begin{cases} K \\ v=1 \end{cases}$

$r(t) = 1(t)$  时,  $e_{ssr} = 0$ ;

$$G_{en_1}(s) = \frac{E(s)}{N_1(s)} = \frac{-\frac{1}{s(T_2s+1)}}{1 + \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}} = \frac{-(T_1s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1) + K}$$

$n_1(t) = 1(t)$  时,  $e_{ssn_1} = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{en_1}(s) N_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{en_1}(s) \frac{1}{s} = -\frac{1}{K}$

$$G_{en_2}(s) = \frac{E(s)}{N_2(s)} = \frac{-\frac{1}{(T_2s+1)}}{1 + \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}} = \frac{-s(T_1s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1) + K}$$

$n_2(t) = 1(t)$  时,  $e_{ssn_2} = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{en_2}(s) N_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{en_2}(s) \frac{1}{s} = 0$



在反馈比较点到干扰作用点之间的前向通道中设置积分环节，可以同时减小由输入和干扰引起的稳态误差。

**题 3.22** 宇航员机动控制系统结构图如图 3-33 所示。其中控制器可以用增益  $K_2$  来表示；宇航员及其装备的总转动惯量  $J = 25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。

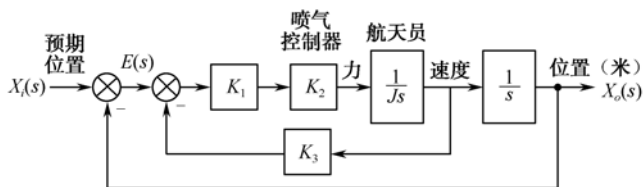


图 3-33 宇航员机动控制系统结构框图

(1) 当输入为斜坡信号  $r(t) = t$  (m) 时，试确定  $K_3$  的取值，使系统稳态误差  $e_{ss} = 1 \text{ cm}$ 。

(2) 采用 (1) 中的  $K_3$  值，试确定  $K_1 K_2$  的取值，使系统超调量  $M_p$  限制在 10% 以内。

**【解析】** 根据系统框图列出系统开环传递函数和闭环传递函数，根据输入斜坡信号和稳态误差确定  $K_3$ ；当已知  $K_3$  和系统超调量范围，根据超调量公式求得  $K_1 K_2$ 。

**解** (1) 系统开环传递函数为

$$G_K(s) = \frac{X_o(s)}{E(s)} = \frac{K_1 K_2}{s(I s + K_1 K_2 K_3)} = \frac{\frac{K_1 K_2}{I}}{s(s + \frac{K_1 K_2 K_3}{I})}, \text{ 联立求得 } \begin{cases} K = \frac{1}{K_3} \\ v = 1 \end{cases}$$

$r(t) = t$  时，令  $e_{ss} = \frac{1}{K} = K_3 \leq 0.001$ ，可取  $K_3 = 0.01$ 。

(2) 系统闭环传递函数为

$$G_B(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{\frac{K_1 K_2}{I}}{s^2 + \frac{K_1 K_2 K_3}{I} s + \frac{K_1 K_2}{I}}, \text{ 联立求得 } \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{K_1 K_2}{I}} \\ \xi = \frac{K_3 \sqrt{K_1 K_2}}{2\sqrt{I}} \end{cases}$$

由  $M_p = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \leq 10\%$ ，可解出  $\xi \geq 0.592$ ，取  $\xi = 0.6$  进行设计。

将  $J = 25$ 、 $K_3 = 0.01$  代入  $\xi = \frac{K_3 \sqrt{K_1 K_2}}{2\sqrt{I}} = 0.6$  表达式，可得：

$$K_1 K_2 \geq 360000$$

**题 3.23** 设复合控制系统结构框图如图 3-34 所示。确定  $K_C$ ，使系统在  $r(t) = t$  作用下无稳态误差。

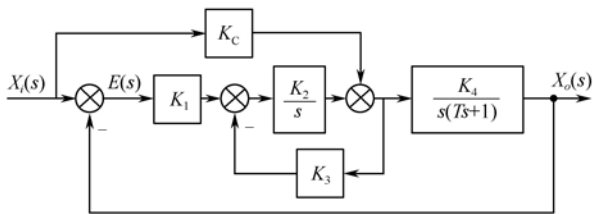


图 3-34 复合控制系统结构框图

【解析】根据系统框图列出系统误差传递函数，利用已知输入斜坡信号和无稳态误差确定  $K_C$ 。

解

$$G_e(s) = \frac{E(s)}{X_i(s)} = \frac{(1 + \frac{K_2 K_3}{s}) - \frac{K_4 K_C}{s(Ts+1)}}{1 + \frac{K_2 K_3}{s} + \frac{K_1 K_2 K_4}{s^2(Ts+1)}} = \frac{s[(s + K_2 K_3)(Ts+1) - K_4 K_C]}{Ts^3 + (1 + TK_2 K_3)s^2 + K_2 K_3 s + K_1 K_2 K_4}$$

由劳斯判据，当  $T$ 、 $K_1$ 、 $K_2$ 、 $K_3$  和  $K_4$  均大于零，且  $(1 + TK_2 K_3)K_3 > TK_1 K_4$  时，系统稳定。

令

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s G_e(s) \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{K_2 K_3 - K_4 K_C}{K_1 K_2 K_4} = 0$$

得

$$K_C = \frac{K_2 K_3}{K_4}$$

**题 3.24** 已知控制系统结构图如图 3-35 所示，试求：（1）按不加虚线所画的顺馈控制时，系统在干扰作用下的传递函数  $G_N(s)$ ；（2）当干扰  $n(t) = \Delta \cdot 1(t)$  时，系统的稳态输出；（3）若加入虚线所画的顺馈控制时，系统在干扰作用下的传递函数，并求  $n(t)$  对输出  $x_o(t)$  稳态值影响最小的适合  $K$  值。

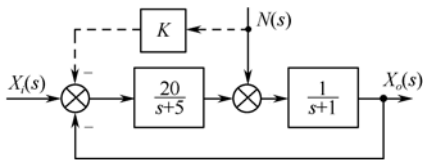


图 3-35 控制系统结构图

【解析】根据系统框图列出顺馈控制前后系统误差传递函数，当已知干扰信号时，求出系统的稳态输出。已知输入斜坡信号和无稳态误差，确定  $K_C$  和  $K$ 。

解 （1）无顺馈时，系统误差传递函数为

$$G_n(s) = \frac{X_o(s)}{N(s)} = \frac{s+5}{(s+1)(s+5)+20} = \frac{s+5}{s^2+6s+25}$$

$$(2) \quad x_n(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_n(s) \cdot N(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_n(s) \cdot \frac{A}{s} = \frac{A}{5}$$

(3) 有顺馈时，系统误差传递函数为

$$G_n(s) = \frac{X_o(s)}{N(s)} = \frac{\frac{1}{s+1} \left[ 1 - \frac{20K}{s+25} \right]}{1 + \frac{20}{(s+1)(s+5)}} = \frac{s+5-20K}{s^2+6s+25}$$

令

$$x_n(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_n(s) \cdot N(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_n(s) \cdot \frac{A}{s} = A \left( \frac{5-20K}{25} \right) = 0$$

得：

$$K = 0.25$$

# 第4章 控制系统的频域分析

## 4.1 基本要求及重难点

### 基本要求

- 掌握频率特性和对数频率特性、相角裕度  $\gamma$  和增益裕度  $K_g$  等基本概念;
- 了解幅角原理、等幅值轨迹图和等相角轨迹图的概念及分析;
- 了解闭环频率特性与开环频率特性之间的关系;
- 熟悉典型环节和一般系统的 Nyquist 图和 Bode 图的绘制, 以及频率特性及物理意义的分析;
- 掌握 Nyquist 稳定判据、Bode 稳定判据以及控制系统的相对稳定性;
- 了解系统闭环频率特性的原理和分析方法;
- 掌握频域中性能指标的定义和求法;
- 掌握频域性能指标与系统性能的关系;
- 了解最小相位系统和非最小相位系统的概念。

### 教学重点

- 频率特性的基本概念及表示法;
- 系统的 Nyquist 图和 Bode 图绘制与分析;
- Nyquist 稳定判据、Bode 稳定判据及系统的相对稳定性。

### 教学难点

- 一般系统频率特性图的画法以及对图形的分析;
- 时频性能指标之间的关系及性能分析。

## 4.2 本章学习指导

### 4.2.1 频域特性的基本概念

#### 1. 频域分析法的特点

控制系统分析的时域法和频域法仅数学语言表达不同, 不影响对系统本身物理过程的分析。时域法侧重于计算分析, 频域法侧重于作图分析, 工程上更喜欢使用频域法。

频域分析法的物理意义较直观。当系统无法用计算分析法建立传递函数时, 可用频域法求

出频率特性，进而导出其传递函数；对算法建立的传递函数，也可以通过实验求出频率特性验证原传递函数的正确性。但是，频域分析法仅适用于线性定常系统。

## 2. 频率响应

系统对正弦（或余弦）信号的稳态响应称为频率响应。当输入  $x_i(t) = X \sin \omega t$  时，其输出包括瞬态响应和稳态响应两部分。瞬态响应为非正弦函数，且  $t \rightarrow \infty$  时，瞬态响应为零；稳态响应是与输入信号同频率的正弦波，但振幅和相位发生变化。频率响应仅是时间响应的特例，频率响应在频域内反映系统的动态特性。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_o(t) = X |G(j\omega)| \sin[\omega t + \angle G(j\omega)] = x_o(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)] \quad (4-1)$$

由于工程上绝大多数的周期信号可用傅里叶变换展开成叠加的离散谐波信号；非周期信号可用傅里叶变换展开成叠加的连续谐波信号，所以，频域分析时用正弦信号作为输入是合理的。

## 3. 频率特性

频域中，系统输出量与输入量之比称为频率特性。

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{x_o(s)}{x_i(s)} \Big|_{s=j\omega} = u(\omega) + jv(\omega) = |G(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = A(\omega) \angle \varphi(\omega) \quad (4-2)$$

$G(j\omega)$  是复数，由实频特性（频率特性的实部） $u(\omega)$  和虚频特性（频率特性的虚部） $v(\omega)$  构成，或者是幅频特性（输出量的振幅与输入量的振幅之比） $|G(j\omega)|$  和相频特性（输出量的相位与输入量的相位之差） $\angle G(j\omega)$  的总称。

显然， $|G(j\omega)| = A(\omega) = \frac{X |G(j\omega)|}{X} = \sqrt{u^2(\omega) + v^2(\omega)}$  反映了系统在不同  $\omega$  下幅值衰减或增大的特性。

$\angle G(j\omega) = \varphi(\omega) = [\omega t + \angle G(\omega)] - \omega t = \arctg \frac{v(\omega)}{u(\omega)}$  反映了系统在不同  $\omega$  下频率特性的幅角变化。规定  $\varphi(\omega)$  逆时针方向为正，一般为负值。

## 4. 频率特性的获取途径

(1) L 逆变换：在复域求取  $X_o(s)$  后，进行拉普拉斯逆变换求得  $x_o(t)$ ，然后令  $t \rightarrow \infty$ ，即可获得系统的频率特性。

(2) 用  $j\omega$  替代  $s$ ：在复域求取  $G(s)$  后，用  $j\omega$  替代  $s$  即可获得  $G(j\omega)$ 。

(3) 实验方法：不能用计算方法建立系统数学模型时尤其适用。通过实验仪器，改变输入信号频率  $\omega$ ，测出相应输出的幅值和相位，画出  $X_o(\omega)/X_i$  随  $\omega$  的变化曲线，即获得幅频特性；画出  $\varphi(\omega)$  随  $\omega$  的变化曲线，即获得相频特性。

基于拉普拉斯变换和傅里叶变换，系统数学模型的微分方程、传递函数和频率特性 3 种表达形式可相互转换，如图 4-1 所示。

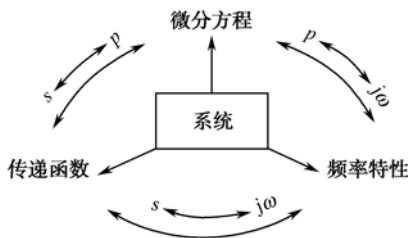


图 4-1 系统数学模型的转换

## 5. 频率特性的图示法

频率特性可以在极坐标下表示，也可在对数坐标下表示。对应的频率特性图叫极坐标图（Nyquist 图）和对数坐标图（Bode 图）。

**Nyquist 图：**当  $\omega$  由  $0 \rightarrow \infty$  时， $G(j\omega)$  矢量的端点在  $[G(j\omega)]$  复平面上所形成的轨迹。 $G(j\omega)$  矢量在实轴上的投影即为实频特性，在虚轴上投影即为虚频特性； $G(j\omega)$  矢量的模为幅频特性， $G(j\omega)$  矢量的相角为相频特性。所以，在 Nyquist 图上既可以表示实频和虚频特性，也反映幅频和相频特性。

**Bode 图：**将频率特性用对数表示，并且将幅、相频率特性分开画。因此，Bode 图是对数幅频特性图和对数相频特性图的统称。

对数幅频特性图的纵坐标为线性分度  $20\lg|G(j\omega)|$ ，单位是分贝（dB）；对数相频特性图的纵坐标为  $\angle G(j\omega)$ ，单位是度（°）。对数幅频特性图和对数相频特性图的横坐标都是对数分度  $\lg \omega$ ，单位是 rad/s 或  $s^{-1}$ 。

对数频率特性有如下优点：

- （1）将复杂的系统串联环节的幅值相乘运算转换为相加运算，大大简化计算过程。
- （2）扩展低频段，压缩高频段。系统主要性能表现在低频区，低频扩展便于分析变化细节，而在高频段只需要知道系统的变化趋势。
- （3）绘制简单。对数频率特性曲线建立在渐近近似的基础上，将各环节幅值渐近线进行累加，获得整个系统的 Bode 图。

## 4.2.2 典型环节和一般系统的频率特性

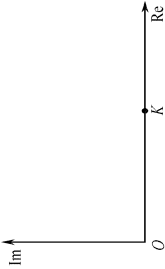
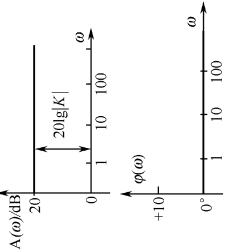
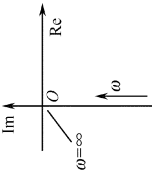
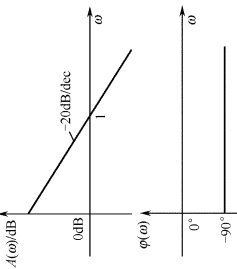
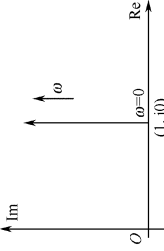
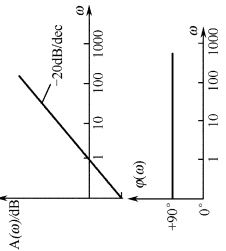
### 1. 典型环节的频率特性

控制系统通常可以等效为由若干简单环节组成，系统的频率特性由典型环节的频率特性组成。典型环节的矢量特性与对数特性、Nyquist 轨迹与 Bode 轨迹、系统的幅相输入/输出特性汇总于表 4-1。

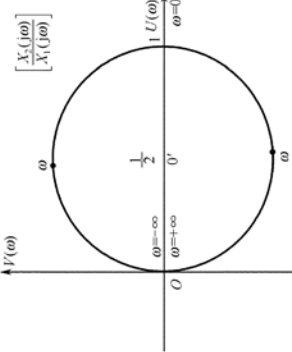
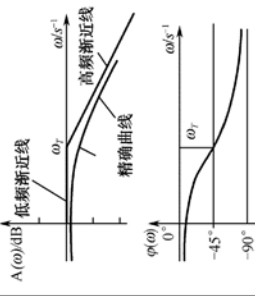
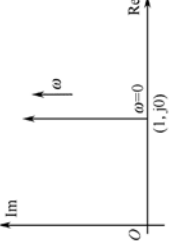
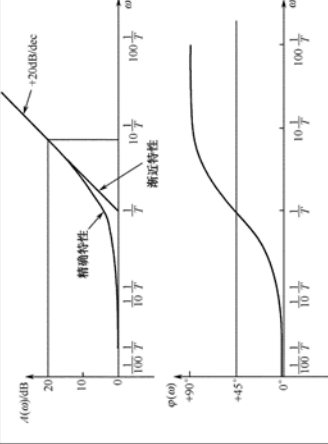
惯性环节本质上就是一个低通滤波器。

振荡环节的  $\xi$  取不同的值，Nyquist 图形状也不同， $\xi$  值越大，曲线范围就越小。当  $\xi \leq 0.707$  时，系统频率特性出现谐振频率  $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$  和谐振峰值  $M_r = 1 / (2\xi \sqrt{1 - \xi^2})$ 。系统固有频率  $\omega_n$  就是 Nyquist 曲线与虚轴之交点，此时幅值  $|G(j\omega)| = 1 / (2\xi)$ 。Bode 图的渐近线与精确曲线之间存在误差，最大误差出现在转角频率  $\omega_r$  附近。

表 4-1 典型环节的频率特性

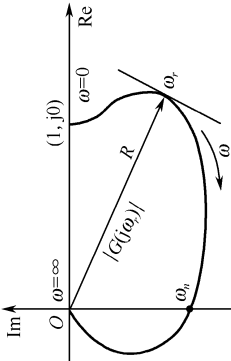
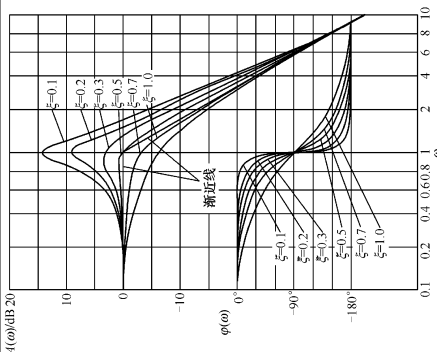
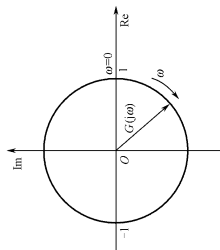
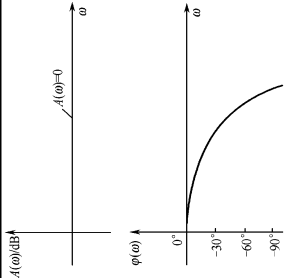
环 节	Nyquist 图		Bode 图		结 论
	矢量特性	轨迹	对数特性	渐近线	
比 例 环 节	$G(j\omega) = K$ $ G(j\omega)  = K$ $\angle G(j\omega) = 0^\circ$ $u(\omega) = K$ $v(\omega) = 0$	 <p>与实轴重合的直线</p>	$20\lg G(j\omega)  = 20\lg K$ $\angle G(j\omega) = 0^\circ$	 <p>幅：一条水平线 相：与 0° 线重合</p>	幅相频率特性与 $\omega$ 无关; 输出量幅幅永远是输入量幅幅的 $K$ 倍; 相位相同
积 分 环 节	$G(j\omega) = 1/j\omega$ $ G(j\omega)  = 1/\omega$ $\angle G(j\omega) = -90^\circ$ $u(\omega) = 0$ $v(\omega) = -1/\omega$	 <p>与负虚轴重合, 由无穷远点指向原点, 相位总是 <math>-90^\circ</math></p>	$20\lg G(j\omega)  = -20\lg \omega$ $\angle G(j\omega) = -90^\circ$	 <p>幅：过 (1,0), 斜率为 <math>-20\text{dB/dec}</math> 的直线 相：过 (0, <math>-90^\circ</math>) 平行于横轴的直线</p>	低频时输出振幅很大, 高频输出振幅为 0; 输出相位总是滞后输入 $90^\circ$
微 分 环 节	$G(j\omega) = j\omega$ $ G(j\omega)  = \omega$ $\angle G(j\omega) = 90^\circ$ $u(\omega) = 0$ $v(\omega) = \omega$	 <p>与正虚轴重合, 由原点指向无穷远点, 相位总是 <math>90^\circ</math></p>	$20\lg G(j\omega)  = 20\lg \omega$ $\angle G(j\omega) = 90^\circ$	 <p>幅：过 (1,0), 斜率为 <math>20\text{dB/dec}</math> 的直线 相：过 (0, <math>+90^\circ</math>) 平行于横轴的直线</p>	低频时输出振幅为 0, 高频输出振幅很大; 输出相位总是超前输入 $90^\circ$

续表

环 节	Nyquist 图		Bode 图		结 论
	矢量特性	轨迹	对数特性	渐近线	
惯 性 环 节	$G(j\omega) = \frac{k}{1+j\omega T}$ $ G(j\omega)  = \frac{k}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$ $\angle G(j\omega) = -\arctg \omega T$ $u(\omega) = \frac{k}{1+\omega^2 T^2}$ $v(\omega) = \frac{k\omega T}{1+\omega^2 T^2}$	 <p>四象限内的一半圆</p>	$20 \lg  G(j\omega) $ $= 20 \lg \omega_T - 20 \lg \sqrt{\omega_T^2 + \omega^2}$ $\angle G(j\omega) = -\arctg \frac{\omega}{\omega_T}$	 <p>幅：低频渐近线与 0dB 线重合，止于 <math>(\omega_T, 0^\circ)</math>；高频渐近线斜率 -20dB/dec，始于 <math>(\omega_T, 0^\circ)</math> 相：对称于点 <math>(\omega_T, -45^\circ)</math>，低频段输出与输入的相位相同，高频段输出相位滞后于输入 <math>90^\circ</math></p>	<p>低频时输出振幅等于输入振幅，输出相位紧跟输入相位；随 <math>\omega</math> 的增大，输出振幅衰减，相位滞后；高频时输出振幅衰减至 0</p>
一 阶 微 分 环 节	$G(j\omega) = 1 + j\omega T$ $ G(j\omega)  = \sqrt{1+\omega^2 T^2}$ $\angle G(j\omega) = \arctg \omega T$ $u(\omega) = 1$ $v(\omega) = \omega T$	 <p>一象限内的直线</p>	$20 \lg  G(j\omega) $ $= \lg \sqrt{\omega_T^2 + \omega^2} - 20 \lg \omega_T$ $\angle G(j\omega) = \arctg \frac{\omega}{\omega_T}$	 <p>幅：低频渐近线与 0dB 线重合，止于 <math>(\omega_T, 0^\circ)</math>；高频渐近线斜率 20dB/dec，始于 <math>(\omega_T, 0^\circ)</math> 相：对称于点 <math>(\omega_T, 45^\circ)</math>，低频段输出与输入的相位相同，高频段输出相位滞后于输入 <math>90^\circ</math></p>	<p>高、低频信号都能全部通过，频率越高，增益越大，相位超前</p>



续表

Nyquist 图			Bode 图		结论
环节	矢量特性	轨迹	对数特性	渐近线	
振荡环节	$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2}$ $ G(j\omega)  = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\zeta^2\lambda^2}}$ $\angle G(j\omega) = -\arctg \frac{2\zeta\lambda}{1-\lambda^2}$ $\lambda = \frac{\omega}{\omega_n}$	 <p>在三、四象限内的曲线，起点为 <math>(1, j0)</math>，终点为 <math>(0, j0)</math></p>	$20 \lg  G(j\omega) $ $= -20 \lg \sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\zeta^2\lambda^2}$ $\angle G(j\omega) = -\arctg \frac{2\zeta\lambda}{1-\lambda^2}$	 <p>幅：低频渐近线与 0dB 线重合，止于 <math>(\omega_n, 0)</math>；高频渐近线为一直线，斜率为 -40dB/dec，始于 <math>(\omega_n, 0)</math> 相：对称于点 <math>(\omega_n, -90^\circ)</math>，低频段输出与输入的相位相同，高频段输出相位滞后于输入 -180°</p>	<p><math>\xi</math> 取值不同，图形形状也不同</p>
延时环节	$G(j\omega) = e^{-j\tau\omega}$ $ G(j\omega)  = 1$ $\angle G(j\omega) = -\tau\omega$	 <p>单位圆</p>	$20 \lg  G(j\omega)  = 0$ $\angle G(j\omega) = -\tau\omega$	 <p>幅：0dB 线 相：衰减曲线</p>	信号全部通过，相位随频率增加而延迟

## 2. 一般系统的 Nyquist 图和 Bode 图

### 1) 一般系统的 Nyquist 图

绘制准确的 Nyquist 图比较麻烦, 可借助计算机以一定频率间隔逐点计算  $G(j\omega)$  的实部与虚部或幅值与相角, 并描绘在极坐标图中。一般情况下, 可根据系统的类型判断系统 Nyquist 曲线的大致形状。

系统频率特性:

$$G(j\omega) = \frac{k(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)\cdots(1+j\omega\tau_m)}{(j\omega)^v(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)\cdots(1+j\omega T_{n-v})} \quad (4-3)$$

(1) 0 型系统 ( $v=0$ ): 系统低频端轨迹始于正实轴, 高端时轨迹取决于  $(m-n) \times 90^\circ$  由哪个象限趋于原点。

(2) I 型系统 ( $v=1$ ): 系统低频端轨迹的渐近线与负虚轴平行 (或重合), 高频端时轨迹趋于原点。

(3) II 型系统 ( $v=2$ ): 系统低频端轨迹的渐近线与负实轴平行 (或重合), 高频端时轨迹趋于原点。

一般系统的 Nyquist 曲线的大致形状如图 4-2 所示。

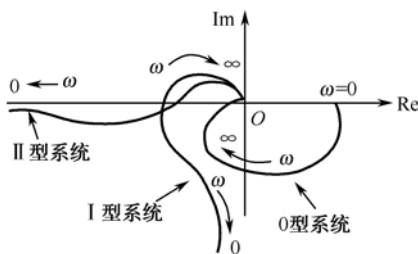


图 4-2 一般系统的 Nyquist 曲线的大致形状

无论 0、I、II 型系统, 低端幅值都很大, 高端都收敛趋于 0, 即控制系统总是具有低通滤波的性能。

### 2) 一般系统的 Bode 图

一般系统 Bode 图可由各环节 Bode 图叠加。

(1) 关于一般系统的对数幅频特性。

① 找出各环节的转角频率  $\omega_r$ : 积分和微分环节  $\omega_r=1$ ; 惯性和导前环节  $\omega_r=1/T$ ; 振荡环节  $\omega_r=\omega_n$ 。

② 用渐近线分别作出各环节的对数幅频特性图: 积分环节在  $\omega_r$  作斜率  $-20\text{dB/dec}$ ; 微分环节在  $\omega_r$  作斜率  $+20\text{dB/dec}$ 。对于惯性/导前/振荡环节, 在  $(\omega_r, 0)$  左边作与  $0\text{dB}$  重合直线, 在  $(\omega_r, 0)$  右边作  $-20\text{dB/dec}$  (惯性环节) 或  $+20\text{dB/dec}$  (导前环节) 或  $-40\text{dB/dec}$  (振荡环节)。

③ 按误差修正曲线对各渐近线进行修正, 得出各环节的精确曲线。

④ 按  $\omega_r$  由小到大的顺序, 将各段曲线叠加, 获得整个系统对数幅频特性曲线。

⑤ 若系统有比例环节  $K$ , 则将曲线向上提升 ( $K>1$ ) 或向下降低 ( $K<1$ )  $20\lg K\text{dB}$ 。

(2) 关于一般系统的对数相频特性。

① 分别作各环节的对数相频特性曲线：对积分环节作过 $-90^\circ$ 的水平线；对微分环节作过 $+90^\circ$ 的水平线；对惯性环节作在 $0^\circ \sim -90^\circ$ 变化的反对数曲线，对称于 $(\omega_r, -45^\circ)$ ；对导前环节作在 $0^\circ \sim 90^\circ$ 变化的反对数曲线，对称于 $(\omega_r, +45^\circ)$ ；对振荡环节作在 $0^\circ \sim -180^\circ$ 变化的反对数曲线，对称于 $(\omega_r, -90^\circ)$ 。

② 将各环节对数相频特性曲线叠加，得到系统的对数相频特性曲线。

③ 若系统有延时环节，则相频特性上须加上 $-\tau\omega$ 。

### 4.2.3 频率特性的性能指标

系统的频域性能指标是用频率特性曲线在数值和形状上的某些特征点来评价的，如图 4-3 所示。

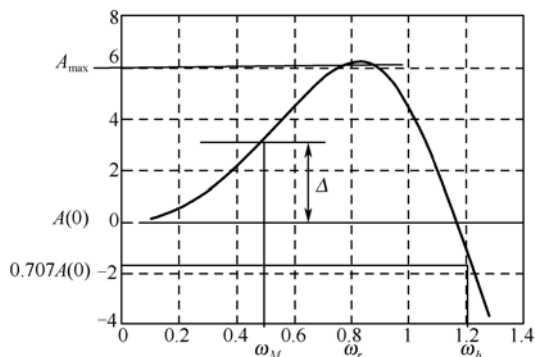


图 4-3 频率特性的性能指标

(1) 零频幅值  $A(0)$ ：当频率  $\omega$  接近于零时，系统输出的幅值与输入的幅值之比。 $A(0)$  的数值与 1 的接近程度，反映了系统的稳态精度。

(2) 复现频率  $\omega_M$  与复现带宽  $0 \sim \omega_M$ ：若规定  $\Delta$  为反映低频输入信号的允许误差，则复现频率  $\omega_M$  就是幅值特性值与零频幅值  $A(0)$  的差第一次达到  $\Delta$  时的频率值。若频率超过  $\omega_M$ ，输出就不能“复现”输入，所以  $0 \sim \omega_M$  表征复现低频输入信号的频带宽度，称为复现带宽。

(3) 谐振频率  $\omega_r$  和谐振峰值  $M_r$ ：对于二阶系统，当谐振频率  $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$  ( $0 \leq \xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ )

时， $|G(j\omega)|$  有谐振峰值  $M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ 。 $M_r$  反映了系统的相对平稳性， $M_r$  越大，系统阶跃

响应的超调量也越大，意味着系统的平稳性较差。谐振频率  $\omega_r$  在一定程度上反映了系统瞬态响应的速度， $\omega_r$  值越大，则瞬态响应越快。

(4) 截止频率  $\omega_b$  和截止带宽  $0 \sim \omega_b$ ：一般规定当幅频特性  $A(\omega)$  的数值由零频幅值  $A(0)$  下降 3dB 时的频率，即  $A(\omega)$  由  $A(0)$  下降到  $0.707A(0)$  时的频率称为系统的截止频率  $\omega_b$ 。频率范围  $0 \sim \omega_b$  称为系统的截止带宽或简称带宽。当系统工作频率超过截止频率  $\omega_b$  后，输出急剧衰减跟不上输入，形成系统响应的截止状态。

## 4.2.4 控制系统的频域稳定性

### 1. Nyquist 和 Bode 绝对稳定性判据

闭环控制系统稳定的充要条件是其特征方程的所有根（即闭环极点）都具有负实部，即所有闭环极点位于  $s$  平面的左半部。在频域利用 Nyquist 和 Bode 稳定判据，不仅可以根据系统的开环特性来判断系统的稳定性，还可以确定系统的相对稳定性。

（1）Nyquist 判据。闭环控制系统稳定的充要条件：当  $\omega$  从  $-\infty$  到  $+\infty$  时，系统的开环频率特性  $G(j\omega)H(j\omega)$  按逆时针方向包围  $(-1, j0)$  点  $P$  周， $P$  为位于  $s$  平面右半部分的开环极点数目。特别地，若开环系统稳定，则  $G(s)H(s)$  位于  $s$  平面右半部分的极点数为零，所以闭环系统稳定的充要条件是系统的开环频率特性  $G(j\omega)H(j\omega)$  不包围  $(-1, j0)$  点。

（2）Bode 判据。闭环系统稳定的充要条件：在开环对数频率特性  $20\lg|G(j\omega)H(j\omega)|$  不为负值的所有频段内，对数相频特性  $\varphi(\omega)$  的正穿越次数与负穿越次数之差为  $P/2$ ， $P$  是开环传递函数在  $s$  平面右半部分的极点数。

### 2. 系统的相对稳定性

绝对稳定性判断出系统属于稳定、不稳定或临界稳定，还不能满足设计要求，应进一步知道稳定或不稳定的程度，即稳定或不稳定离临界稳定尚有多远，才能正确评价系统稳定性性能的优劣，此即相对稳定性。

#### 1) 极坐标和对数坐标的对应关系

（1）极坐标的单位圆  $\leftrightarrow$  对数坐标的零分贝线（幅频特性），相当于  $|GH|=1 \leftrightarrow 20\lg|GH|=0\text{dB}$ 。

（2）极坐标的负实轴  $\leftrightarrow$  对数坐标的  $-180^\circ$  水平线（相频特性），原因是负实轴上的每一点的幅角都等于  $-180^\circ$ 。

（3）极坐标的开环轨迹与单位圆的交点  $c \leftrightarrow$  对数坐标的幅频特性与零分贝线的交点。交点  $c$  处的频率  $\omega_c$  称为剪切频率、幅值穿越频率、幅值交界频率。

（4）极坐标的开环轨迹与负实轴的交点  $g \leftrightarrow$  对数坐标的相频特性与  $-180^\circ$  水平线的交点。交点  $g$  处的频率  $\omega_g$  称为相位穿越频率、相位交界频率。

#### 2) 系统相对稳定性的度量指标

控制系统的开环频率特性  $G(j\omega)H(j\omega)$  与  $(-1, j0)$  点的接近程度表征了闭环系统的稳定程度，即系统的相对稳定性。 $G(j\omega)H(j\omega)$  离开  $(-1, j0)$  点越远，其对应的闭环系统的稳定程度越高；反之  $G(j\omega)H(j\omega)$  越靠近  $(-1, j0)$  点，则闭环系统的稳定程度便越低。

幅值裕度  $K_g$  和相位裕度  $\gamma$  是衡量系统相对稳定性的两个指标。

（1）增益裕度  $K_g$ （幅值裕度）：在相频特性等于  $-180^\circ$  的频率  $\omega_g$  处，开环幅频特性  $G(j\omega)H(j\omega)$  的倒数称为系统的增益裕度  $K_g$ 。

$$K_g = \frac{1}{|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|} \quad (4-4)$$

$K_g$  也可以用分贝形式表示。在 Bode 图上， $K_g$  表示在相频特性等于  $-180^\circ$  的频率  $\omega_g$  处，

开环对数幅频特性曲线和横轴的距离 $[0 \sim L(\omega)]$ 。

$$20 \ln K_g = -20 \ln A(\omega_g) = -L(\omega_g) \quad (4-5)$$

若 $|G(j\omega_g)H(j\omega_g)| < 1$ ,  $K_g > 1$ , 即 $K_g(\text{dB}) > 0$ , 则系统具有正幅值裕度; 若 $|G(j\omega_g)H(j\omega_g)| > 1$ ,  $K_g < 1$ , 即 $K_g(\text{dB}) < 0$ , 则系统具有负幅值裕度, 如图 4-4 所示。 $K_g$  实际上是系统由稳定(或不稳定)到达临界稳定点时, 其开环传递函数 $G(j\omega)H(j\omega)$ 在 $\omega_g$ 处的幅值 $|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|$ 需扩大或缩小的倍数。一阶、二阶系统幅值裕度为无穷大, 原因是其开环轨迹与 $[GH]$ 平面的负实轴交于原点, 即 $1/K_g = 0$ 。

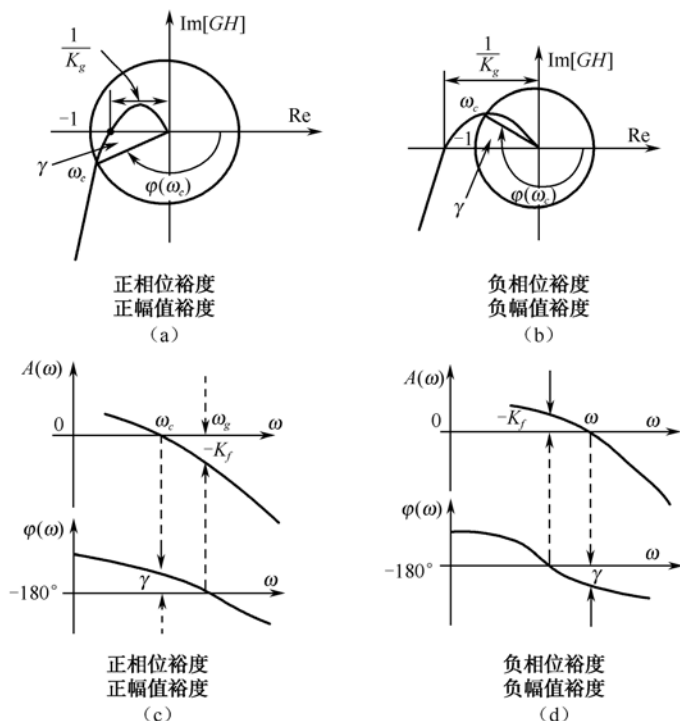


图 4-4 幅值裕度  $K_g$  和相位裕度  $\gamma$

(2) 相位裕度  $\gamma$ : 在剪切频率  $\omega_c$  处, 使系统达到稳定的临界状态需要附加的相移量(超前或迟后), 称为相位裕度。

$$\gamma = \varphi(\omega_c) - (-180^\circ) = 180^\circ + \varphi(\omega_c) \quad (4-5)$$

若  $\gamma > 0$  称正相位裕度(正稳定性储备),  $\gamma$  必在 Bode 相位图横轴 ( $-180^\circ$  线) 以上, 在 Nyquist 图负实轴以下(第三象限);

若  $\gamma < 0$  称负相位裕度(负稳定性储备),  $\gamma$  必在 Bode 相位图横轴 ( $-180^\circ$  线) 以下, 在 Nyquist 图负实轴以上(第二象限)。

需要说明的是,  $K_g$ 、 $\gamma$  作为设计指标, 对于最小相位系统而言, 只有  $K_g$ 、 $\gamma$  都为正时, 闭环系统才稳定;  $K_g$ 、 $\gamma$  都为负时, 闭环系统不稳定。为确定系统相对稳定性, 必须同时考虑  $K_g$  和  $\gamma$ 。工程上, 为使系统满意的稳定性储备, 一般要求:

$$K_g(\text{dB}) > 6 \text{ dB}$$

$$\gamma = 30^\circ \sim 60^\circ, \text{ 即 } \angle G(j\omega_c)H(j\omega_c) = -150^\circ \sim -120^\circ$$

### 4.3 例题题解

**例 4.1** 某单位反馈系统的开环传递函数渐近线如图 4-5 所示。(1) 写出系统的开环传递函数；(2) 判断系统的稳定性；(3) 确定系统阶跃响应的性能指标  $M_p$ ,  $t_s$ ；(4) 若将幅频特性曲线向右平移 10 倍频程，求时域指标  $M_p$  和  $t_s$ 。

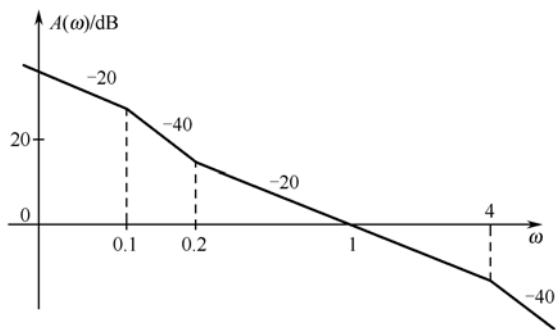


图 4-5 单位反馈系统的开环传递函数渐近线

**解** (1) 由图 4-5 可写出系统的开环传递函数：

$$G(s) = \frac{K(\frac{s}{0.2} + 1)}{s(\frac{s}{0.1} + 1)(\frac{s}{4} + 1)}, \text{ 且 } \omega_c = 1$$

$$|G(j\omega_c)| = \frac{K\sqrt{(\frac{\omega_c}{0.2})^2 + 1}}{\omega_c\sqrt{(\frac{\omega_c}{0.1})^2 + 1} \cdot \sqrt{(\frac{\omega_c}{4})^2 + 1}} = \frac{5K}{10} = 1, \text{ 则 } K = 2$$

故

$$G(s) = \frac{2(\frac{s}{0.2} + 1)}{s(\frac{s}{0.1} + 1)(\frac{s}{4} + 1)} = \frac{2(5s + 1)}{s(10s + 1)(0.25s + 1)}$$

(2) 系统的相位裕度：

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 10\omega_c - \arctan 0.25\omega_c + \arctan 5\omega_c \\ &= 90^\circ - 84.3^\circ - 14^\circ + 78.7^\circ = 70.4^\circ > 0 \end{aligned}$$

所以，闭环系统稳定。

$$(3) \quad M_p = 0.16 + 0.4\left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1\right) = 0.1846$$

$$t_s = \frac{\pi}{\omega_c} \left[ 2 + 1.5 \left( \frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right) + 2.5 \left( \frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right) \right] = 6.6 \text{ s}$$

(4) 当幅频特性曲线向右平移 10 倍频程时,  $\gamma$  不变而  $\omega_c$  增大 10 倍, 所以

$$M_p = 18.46\%, \quad t_s = 0.66 \text{ s}$$

**例 4.2** 某系统框图如图 4-6 所示。已知:  $x_i(t) = 1(t)$ ,  $n(t) = 0.1 \sin 10t \cdot 1(t)$ , 试求: (1) 稳态输出响应  $x_{oss}(t)$ ; (2) 稳态误差响应  $e_{ss}(t)$ 。

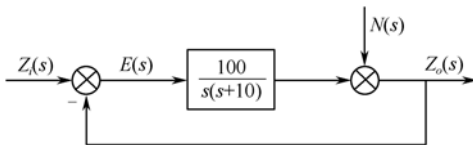


图 4-6 系统结构图

**解** 不难判断出该系统是渐近稳定的, 则正弦输入的系统响应稳态分量一定是同频率的正弦量。

(1)  $x_i(t)$  单独作用时  $x_{oss_i}(t) = 1 \quad (t \rightarrow \infty)$ 。

$n(t)$  单独作用时:

$$X_{on}(s) = \frac{1}{1 + \frac{100}{s(s+10)}} N(s) = \frac{s(s+10)}{s^2 + 10s + 100} N(s)$$

$$x_{ossn}(t) = 0.1 \left| \frac{j\omega(j\omega + 10)}{(j\omega)^2 + 10(j\omega) + 100} \right|_{\omega=10} \sin \left\{ \omega t + \angle \left[ \frac{j\omega(j\omega + 10)}{(j\omega)^2 + 10(j\omega) + 100} \right] \right\}$$

$$= 0.141 \sin(10t + 45^\circ) \quad (t \rightarrow \infty)$$

$x_i(t)$  与  $n(t)$  共同作用时的稳态输出响应:

$$x_{oss}(t) = 1 + 0.141 \sin(10t + 45^\circ) \quad (t \rightarrow \infty)$$

(2) 稳态误差响应  $e_{ss}(t)$ :

$$e_{ss}(t) = 1 - x_{oss}(t) = -1.41 \sin(10t + 45^\circ) \quad (t \rightarrow \infty)$$

**例 4.3** 某单位负反馈最小相位系统, 其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)}$$

当  $x_i(t) = 3 \cos 3t$  时, 从示波器中观测到输出和输入的振幅相等, 输出在相位上落后于输入  $90^\circ$ 。(1) 确定参数  $K$ 、 $a$ ; (2) 若  $x_i(t) = 3 \cos \omega t$ , 确定当  $\omega$  为何值时, 稳态输出  $x_o(t)$  的振幅最大, 并算出此最大幅值。

解 (1) 该系统的闭环传递函数为

$$G_B(s) = \frac{K}{s^2 + as + K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

则  $\omega_n = \sqrt{K}$ ,  $\xi = \frac{a}{2\sqrt{K}}$ 。

对于无零点的二阶系统, 当  $\omega = \omega_n$  时输出落后于输入  $90^\circ$ , 故

$$\omega_n = \omega = 3, \quad K = \omega_n^2 = 9, \quad \xi = \frac{a}{6}$$

根据  $A(\omega_n) = A(3) = \frac{1}{2\xi} = 1$ , 故  $\xi = 0.5$ ,  $a = 3$ 。

(2) 当  $\omega = \omega_r$  时, 系统处于谐振状态,  $M = M_r$ 。

谐振频率:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

谐振峰值:

$$M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

例 4.4 某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{s}$$

式中,  $K > 0$ ;  $\tau = 2$ 。试大致画出 Nyquist 图, 并确定使系统渐近稳定的  $K$  的取值范围。

解 系统开环频率特性:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{Ke^{-j2\omega}}{j\omega}$$

幅频特性  $A(\omega) = \frac{K}{\omega}$ ; 相频特性  $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2\omega$ 。

令  $\varphi(\omega_g) = -\frac{\pi}{2} - 2\omega_g = -\pi$ , 得 Nyquist 曲线与负实轴第一个相交点

频率  $\omega_g = \frac{\pi}{4}$ , 与负实轴第一个相交点幅值  $A(\omega_g) = \frac{K}{\omega_g} = \frac{4K}{\pi}$ , 画出的

Nyquist 图大致形状如图 4-7 所示。

令  $-\frac{4K}{\pi} = -1$ , 得临界稳定的值  $K = \frac{\pi}{4}$ 。使系统渐近稳定的  $K$  取值范围为  $0 < K < \frac{\pi}{4}$ 。

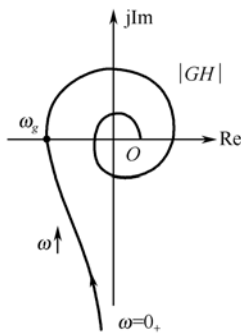


图 4-7 Nyquist 图大致形状



**例 4.5** 某最小相位单位负反馈系统，其频率特性如图 4-8 所示。试求：(1) 确定开环传递函数；(2) 计算闭环系统的  $\omega_n$  和  $\xi$ 。

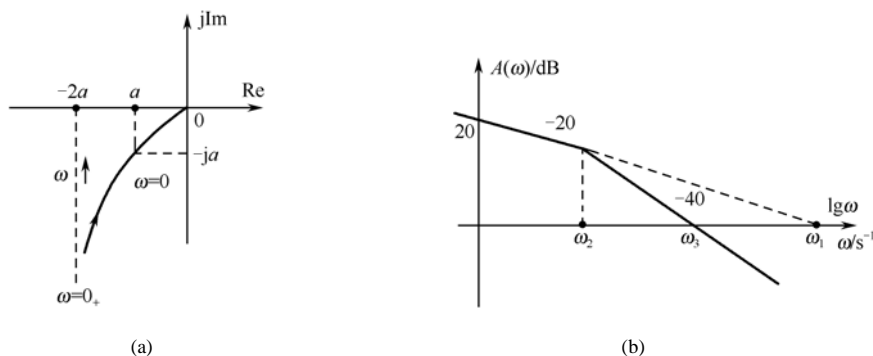


图 4-8 最小相位单位负反馈系统频率特性

**解** (1) 由图 4-8(b)所示可知：

$$G(s) = \frac{\omega_1}{s \left( \frac{s}{\omega_2} + 1 \right)}, \quad \omega_3 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

$$G(j\omega) = -\frac{\frac{\omega_1}{\omega_2} \omega}{\omega \left( 1 + \frac{\omega^2}{\omega_2^2} \right)} - j \frac{\omega_1}{\omega \left( 1 + \frac{\omega^2}{\omega_2^2} \right)}$$

当  $\omega = 2$  时，有  $\text{Re}[G(j\omega)] = \text{Im}[G(j\omega)]$ ，得  $\omega_2 = 2$ 。

由图 4-8(a)中渐近线与负实轴的交点，得出  $-\frac{\omega_1}{\omega_2} = -2a$ ，即  $\omega_1 = 4a$ 。

而  $\omega_3 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} = 2\sqrt{2a}$ ，将  $\omega_1$ 、 $\omega_2$ 、 $\omega_3$  代入  $G(s)$  中，可得  $G(s) = \frac{8a}{s(s+2)}$ 。

(2) 由  $2\xi\omega_n = 2$ ，得  $\xi\omega_n = 1$ ；而  $\omega_n = \sqrt{8a}$ ， $\xi = \frac{1}{\sqrt{8a}} = \frac{\sqrt{2a}}{4a}$ 。

**例 4.6** 单位反馈系统的闭环对数幅频特性分段渐近线如图 4-9 所示，现要求系统具有  $30^\circ$  的相位裕度，试计算开环增益应增大多少倍？

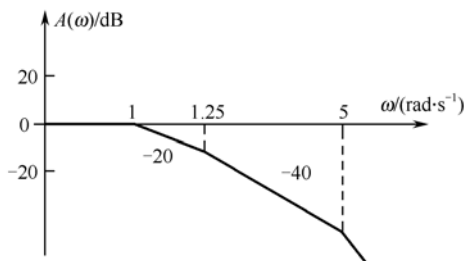


图 4-9 单位反馈系统的闭环对数幅频特性分段渐近线

解 由图 4-9 所示可得系统的闭环传递函数为

$$G_B(s) = \frac{1}{(s+1)(\frac{s}{1.25}+1)(\frac{s}{5}+1)} = \frac{6.25}{(s+1)(s+1.25)(s+5)}$$

因此系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{G_B(s)}{1-G_B(s)} = \frac{0.5}{s(\frac{s}{2.825}+1)(\frac{s}{4.425}+1)}$$

相位裕度为

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{1}{2.825} \omega_c - \arctan \frac{1}{4.425} \omega_c$$

因为  $\gamma = 30^\circ$ ，解得  $\omega_c = 2.015$ 。

以转角频率划分频段范围，按  $\frac{j\omega}{\omega_i} + 1 \approx \begin{cases} 1 & \omega \leq \omega_i \\ \frac{j\omega}{\omega_i} & \omega > \omega_i \end{cases}$  解析法求  $G(j\omega)$  中有关环节的截止频率，有：

$$A(\omega) = \begin{cases} 20\lg \frac{0.5}{\omega} K & \omega < 2.825 \\ 20\lg \frac{1.4125}{\omega^2} K & 2.825 \leq \omega < 4.425 \\ 20\lg \frac{6.25}{\omega^3} K & \omega \geq 4.425 \end{cases}$$

因为  $\omega_c = 2.015 < 2.825$ ，所以  $\frac{0.5}{\omega_c} K = 1$ ，得：

$$K = 4.03$$

即系统的开环增益应增大 4.03 倍。

**例 4.7** 某最小相位系统的对数幅频渐近线特性如图 4-10 所示。图中虚线为对应的振荡环节及二阶微分环节的修正曲线。(1) 确定系统开环传递函数  $G(s)H(s)$ ；(2) 确定闭环系统的稳定性；(3) 写出各段渐近线方程。

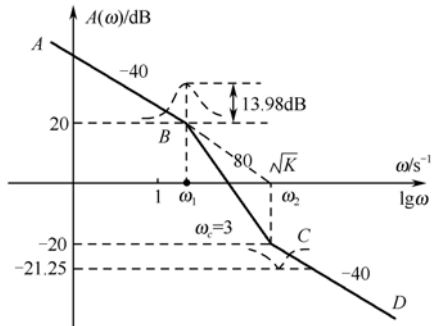


图 4-10 最小相位系统的对数幅频渐近线特性

解 (1) 由 Bode 图可知,  $G(s)H(s)$  具有如下形式:

$$G(s)H(s) = \frac{K \left[ \left( \frac{s}{\omega_2} \right)^2 + 2\xi_1 \left( \frac{s}{\omega_2} \right) + 1 \right]}{s^2 \left[ \left( \frac{s}{\omega_1} \right)^2 + 2\xi_2 \left( \frac{s}{\omega_1} \right) + 1 \right]}$$

由  $80\lg \frac{3}{\omega_1} = 20$ , 得  $\omega_1 = 1.69$ ; 由  $40\lg \frac{\sqrt{K}}{\omega_1} = 20$ , 得  $K = 28.6$ 。

由  $-80\lg \frac{\omega_2}{\omega_c} = -20$ , 得  $\omega_2 = 5.33$ ; 由  $20\lg \frac{1}{2\xi} = 13.98$ , 得  $\xi_2 = 0.1$ 。

由  $20\lg \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = 1.25$ , 得  $\xi_1 = 0.5$ 。

将  $K$ 、 $\omega_1$ 、 $\omega_2$ 、 $\xi_1$ 、 $\xi_2$  代入式  $G(s)H(s)$  中, 可得

$$G(s)H(s) = \frac{28.6 \left[ 0.0352s^2 + 0.188s + 1 \right]}{s^2 \left[ 0.350s^2 + 0.118s + 1 \right]}$$

(2) 稳定性。该系统满足利用相位裕度  $\gamma$  判定系统稳定性的充分必要条件, 将参数代入相位裕度公式  $\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c)$  中, 可得:

$$\gamma = 180^\circ - 180^\circ - \arctan \frac{2\xi\tau\omega_c}{1 - (\tau\omega_c)} - \arctan \frac{2\xi T\omega_c}{1 - (T\omega_c)} = -130^\circ < 0^\circ$$

则系统发散不稳定。

(3) 渐近线特性各段方程:

$$A_{AB} = 20\lg \frac{K}{\omega^2} = 20\lg K - 40\lg \omega \quad (0 \leq \omega < 1.69)$$

$$A_{BC} = 20\lg \left( \frac{K}{\omega^2} \cdot \frac{\omega_1^2}{\omega^2} \right) = 20\lg K\omega_1^2 - 80\lg \omega \quad (1.69 \leq \omega < 5.33)$$

$$A_{CD} = 20\lg \left( \frac{K}{\omega^2} \cdot \frac{\omega_1^2}{\omega^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_2^2} \right) = 20\lg \frac{K\omega_1^2}{\omega_2^2} - 40\lg \omega \quad (5.33 \leq \omega < \infty)$$

**例 4.8** 单位反馈最小相位系统, 其开环频率特性 Bode 图如图 4-11 所示。试求: (1) 系统开环传递函数  $G(s)$ ; (2) 截止频率  $\omega_c$  及相位裕度  $\gamma$ ; (3) 阶跃响应的动态性能指标  $M_p$  和  $t_s$  ( $\Delta = 0.05$ ); (4) 当  $x_i(t) = 2t + 4$  时的稳态误差。

解 (1) 由系统开环频率特性 Bode 图可得系统开环传递函数  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)} = \frac{10}{s(0.1s + 1)}$$

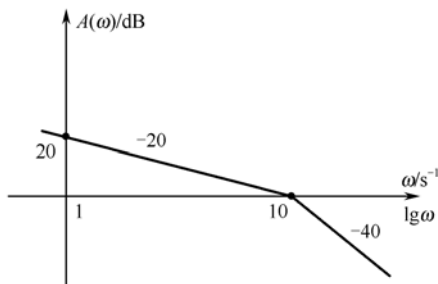


图 4-11 单位反馈最小相位系统的开环特性 Bode 图

(2) 令  $\left| \frac{10}{j\omega_c(1+j0.1\omega_c)} \right| = 1$ , 得截止频率  $\omega_c = 7.86 \text{ rad/s}$ 。

相位裕度  $\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.1\omega_c = 51.8^\circ$ 。

(3) 由  $G(s) = \frac{100}{s(s+10)} = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$ , 得  $\omega_n = 10 \text{ rad/s}$ ,  $\xi = 0.5$ 。

故阶跃响应的动态性能指标:

$$M_p = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = 16.3\%$$

$$t_s(\Delta = 0.05) = \frac{3}{\xi\omega_n} = 0.6 \text{ s}$$

(4) 系统的静态误差系数:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 10 \text{ rad/s}$$

稳态误差:

$$e_{ss} = \frac{2}{K_v} = 0.2$$

**例 4.9** 设最小相位系统的结构如图 4-12 (a) 所示,  $G(s)G_c(s)$  的 Bode 图如图 4-12 (b) 所示。(1) 求出传递函数  $G(s)G_c(s)$ ; (2) 计算相位裕度  $\gamma$  并指出系统的稳定性。

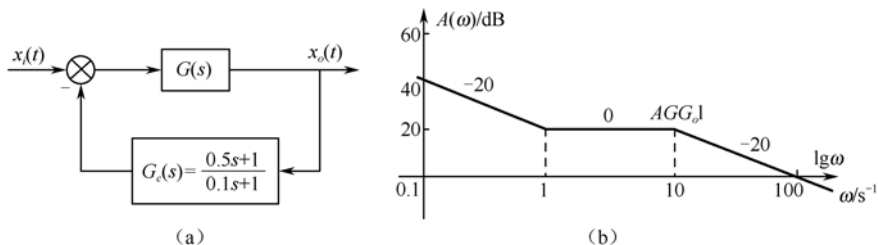


图 4-12 最小相位系统的结构图和 Bode 图

解 (1) 由图 4-12(b)所示可知

$$G(s)G_c(s) = K \frac{\tau s + 1}{s(Ts + 1)} = 10 \frac{s + 1}{s(0.1s + 1)}$$

故

$$G(s) = \frac{G(s)G_c(s)}{G_c(s)} = \frac{10(s + 1)}{s(0.1s + 1)} \cdot \frac{0.1s + 1}{0.5s + 1} = \frac{10(s + 1)}{s(0.5s + 1)}$$

(2) 令  $\frac{10\omega_c}{\omega_c \cdot 0.1\omega_c} = 1$ , 得剪切频率  $\omega_c = 100 \text{ rad/s}$ 。

相位裕度:

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ + \arctan \omega_c - \arctan 0.1\omega_c = 95.1^\circ$$

故系统渐近稳定。

例 4.10 某闭环系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{k}{s(s^2 + s + 100)}$$

试求当  $K_g = 10 \text{ dB}$  时的开环放大系数  $K$ 。

解 利用解析法求解。

系统的开环幅频特性:

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = \frac{k}{\omega \sqrt{(100 - \omega^2)^2 + \omega^2}}$$

相频特性:

$$\angle [G(j\omega)H(j\omega)] = -90^\circ - \arctan \frac{\omega}{100 - \omega^2}$$

令  $\angle [G(j\omega_g)H(j\omega_g)] = -180^\circ$ , 得  $\omega_g = 10 \text{ rad/s}$ 。

$$\text{而 } \frac{1}{K_g} = |G(j\omega_g)H(j\omega_g)| = \frac{k}{10 \sqrt{(100 - \omega_g^2)^2 + \omega_g^2}} = \frac{k}{100}$$

由  $K_g = 20 \lg K_g = 20 \lg \frac{100}{k} = 10$ , 得  $k = 31.6$ 。

故系统开环放大系数:

$$K = \frac{k}{100} = 0.316$$

## 4.4 习题解析

题 4.1 已知放大器的传递函数  $G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$ , 并测得  $\omega = 1 \text{ (rad/s)}$ 、幅频  $|G| = 12/\sqrt{2}$ 、

相频  $\angle G = \pi/4$ 。试求放大系数  $K$  及时间常数  $T$  各为多少?

【解析】通过惯性环节的幅频特性及相频特性，代入已知条件，求得放大系数  $K$  及时间常数  $T$ 。

解

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}} \Big|_{\omega=1} = \frac{K}{\sqrt{T^2 + 1}} = \frac{12}{\sqrt{2}}$$

$$\angle G = -\arctan T\omega \Big|_{\omega=1} = \pi/4$$

解得  $T = -1$ ,  $K = 12$ 。

题 4.2 设单位反馈控制系统的开环传递函数  $G(s) = \frac{10}{s+1}$ ，试求闭环系统在下列输入信号

作用下的稳态响应：(1)  $x_i(t) = \sin(t + 30^\circ)$ ；(2)  $x_i(t) = 2\cos(2t - 45^\circ)$ 。

【解析】通过系统的开环传递函数求得系统的闭环传递函数和频率特性，从而求得系统稳态误差。

解 系统的闭环传递函数为

$$G_B(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{10}{s + 11}$$

则频率特性：

$$G_B(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 11} = \frac{10}{\sqrt{121 + \omega^2}} \cdot e^{-j\arctan \frac{\omega}{11}}$$

$$(1) \quad \omega = 1, \quad G_B(j\omega) = \frac{10}{\sqrt{122}} \cdot e^{-j5.2^\circ}$$

$$x_{oss1}(t) = \frac{10}{\sqrt{122}} \sin(t + 30^\circ - 5.2^\circ) = 0.905 \sin(t + 24.8^\circ)$$

$$(2) \quad \omega = 2, \quad G_B(j\omega) = \frac{10}{\sqrt{122}} \cdot e^{-j10.3^\circ}$$

$$x_{oss1}(t) = 2 \times \frac{10}{\sqrt{125}} \cos(2t + 45^\circ - 10.3^\circ) = 1.79 \cos(2t + 55.3^\circ)$$

题 4.3 系统单位阶跃响应：

$$h(t) = 1 - 1.8e^{-4t} + 0.8e^{-9t} \quad (t \geq 0)$$

试求系统的频率特性表达式。

【解析】已知系统的单位阶跃响应，进行拉普拉斯变换，求得系统的传递函数，从而求得系统的频率特性。

解

$$X_o(s) = \frac{1}{s} - \frac{1.8}{s+4} + \frac{0.8}{s+9} = \frac{36}{s(s+4)(s+9)}, \quad X_i(s) = \frac{1}{s}$$

则

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{36}{(s+4)(s+9)}$$

频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{36}{(j\omega+4)(j\omega+9)}$$

**题 4.4** 画出下列传递函数对应的对数幅频渐近曲线和相频曲线：

$$(1) G(s) = \frac{2}{(2s+1)(8s+1)}$$

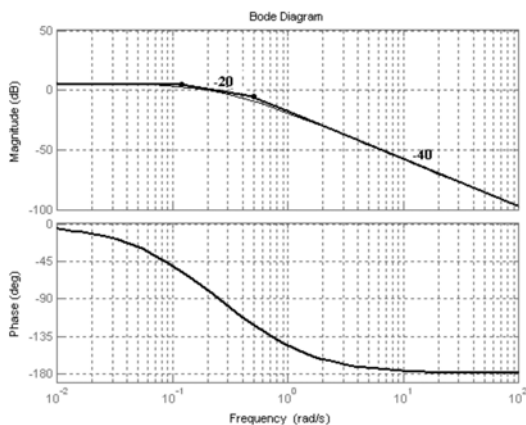
$$(2) G(s) = \frac{50}{s^2(s^2+s+1)(6s+1)}$$

$$(3) G(s) = \frac{10(s+0.2)}{s^2(s+0.1)}$$

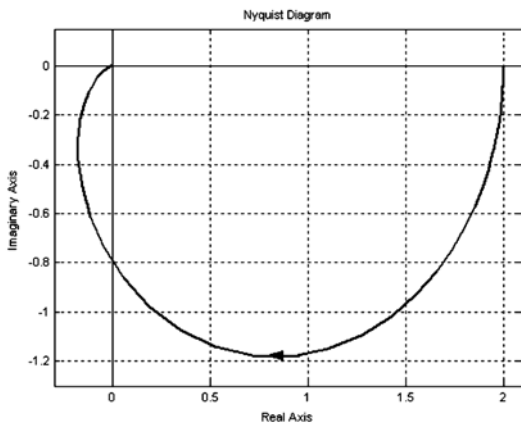
$$(4) G(s) = \frac{8(s+0.1)}{s(s^2+s+1)(s^2+4s+25)}$$

**【解析】** 通过典型环节的幅频特性曲线和相频特性曲线，叠加求得系统的幅频特性曲线和相频特性曲线（见图 4-13~图 4-16）。

解 (1)  $G(s) = \frac{2}{(2s+1)(8s+1)}$



(a) Bode 图



(b) Nyquist 图

图 4-13 题 4.4 图 (一)

$$(2) G(s) = \frac{50}{s^2(s^2+s+1)(6s+1)}$$

$$(3) G(s) = \frac{10(s+0.2)}{s^2(s+0.1)}$$

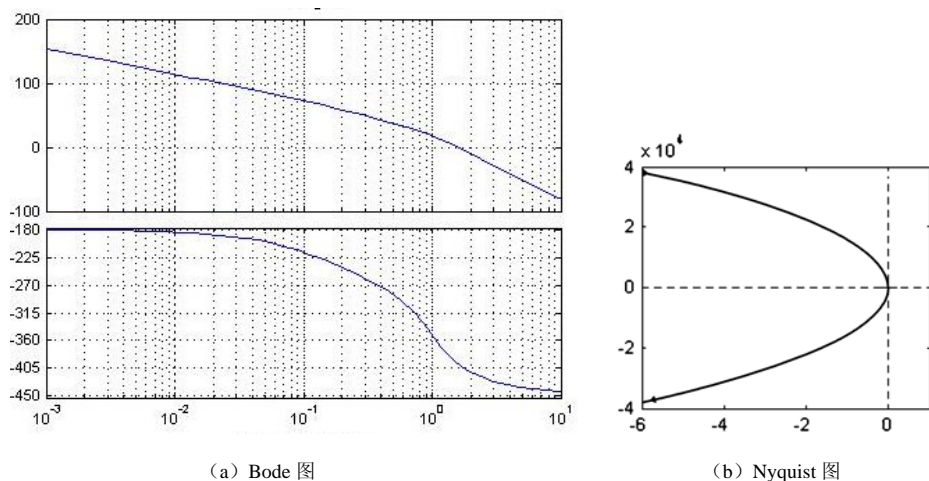


图 4-14 题 4.4 图 (二)

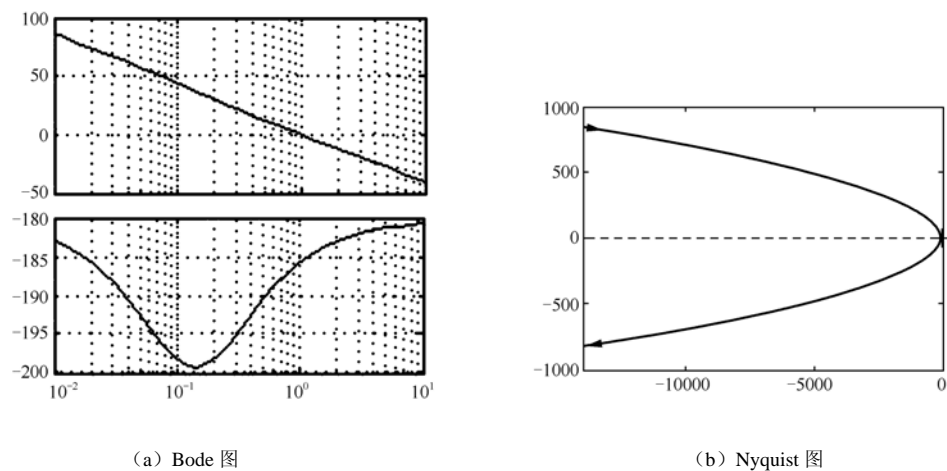


图 4-15 题 4.4 图 (三)

$$(4) G(s) = \frac{8(s+0.1)}{s(s^2+s+1)(s^2+4s+25)}$$

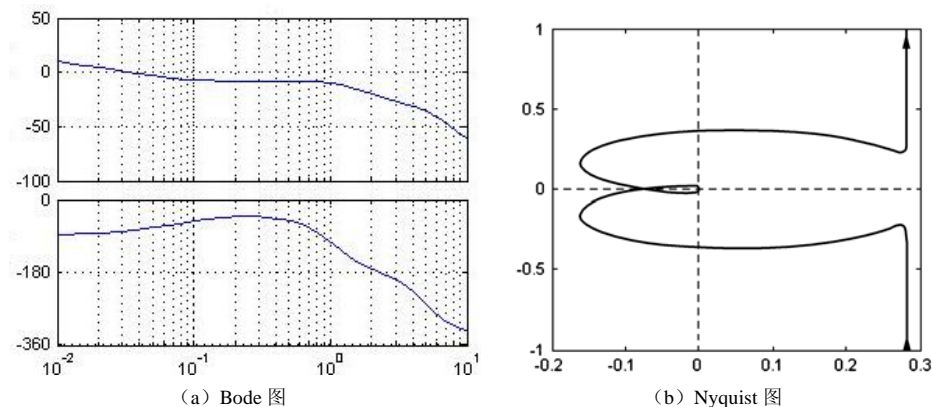


图 4-16 题 4.4 图 (四)



**题 4.5** 测得一些元部件的对数幅频渐近曲线如图 4-17 所示, 试写出对应的传递函数  $G(s)$ 。

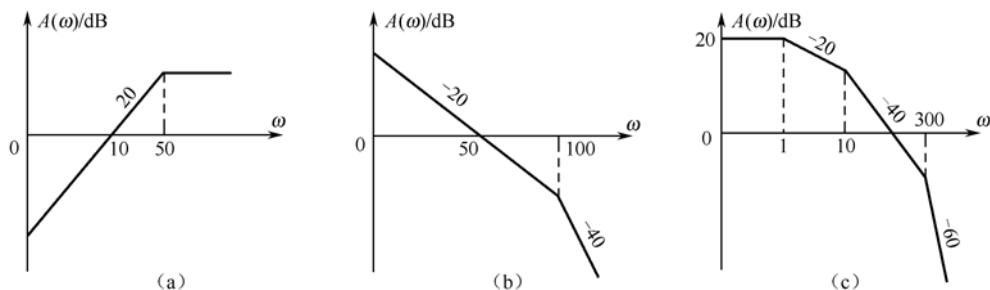


图 4-17 一些元部件的对数幅频渐近曲线

**【解析】** 通过典型环节的幅频特性曲线求得系统传递函数, 比例环节的对数幅频特性是平行于  $\omega$  轴的直线; 积分环节的对数幅频特性是斜率为  $-20\text{dB/dec}$  的直线; 惯性环节的渐近对数幅频特性为一折线, 转折频率前是  $0\text{dB}$ , 转折频率后是斜率为  $-20\text{dB/dec}$  的直线; 一阶微分环节的渐近对数幅频特性为一折线, 转折频率前是  $0\text{dB}$ , 转折频率后是斜率为  $+20\text{dB/dec}$  的直线。开环渐近对数幅频特性与  $0\text{dB}$  线的交点频率即剪切频率, 通过剪切频率确定系统放大倍数。

**解** (1) 由图 4-17(a)看出, 对数幅频特性各段频率为  $20\text{dB}$  和  $0\text{dB}$ , 故可判定传递函数由微分、惯性和比例三个环节组成。因为对数幅频渐近特性曲线的低频线的斜率为  $20\text{dB}$ , 则其传递函数为

$$G(s) = \frac{Ks}{\frac{s}{50} + 1}$$

由给定条件确定传递函数参数。由  $L(10) = 0$ , 则  $20\lg 10K = 0$ , 解得  $K = \frac{1}{10}$ , 则系统传递函数为

$$G(s) = \frac{\frac{1}{10}s}{\frac{s}{50} + 1}$$

(2) 由图 4-17(b)看出, 对数幅频特性各段斜率为  $-20\text{dB}$  和  $-40\text{dB}$ , 故可判定传递函数由积分、惯性和比例三个环节组成, 其传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s\left(\frac{s}{100} + 1\right)}$$

确定增益  $K$ : 由于低频段斜率为  $-20\text{dB}$ , 所以它与零分贝线的交点频率值等于增益, 则  $K = 50$ 。故传递函数的表达式为

$$G(s) = \frac{50}{s\left(\frac{s}{100} + 1\right)}$$

(3) 由图 4-17 (c) 看出, 对数幅频特性各段频率为 0dB; -20dB; -40dB; -60dB, 故可判定传递函数由积分、惯性和比例三个环节组成, 其传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{300}+1\right)}$$

由给定条件确定传递函数参数。由于低频渐近线通过  $(1, 20\lg K)$ , 故

$$20\lg K = 20$$

解得  $K=10$ , 于是传递函数为

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{300}+1\right)}$$

**题 4.6** 已知某控制系统结构框图如图 4-18 所示, 试计算系统的开环截止频率和相位裕度。

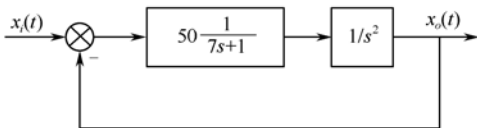


图 4-18 控制系统结构框图

**【解析】** 通过系统框图求得系统的开环传递函数和频率特性, 计算求得系统的截止频率和相位裕度。

**解** 系统的开环传递函数为

$$G(s) = 50\left(\frac{1}{7s+1}\right)(1/s^2) = \frac{50+350s}{7s^3}$$

令  $|G(j\omega_c)|=1$ , 有

$$|G(j\omega_c)| = \frac{\sqrt{50^2 + (350s)^2}}{7\omega_c^3} = 1$$

解得  $\omega_c = 7.07$ 。

$$\gamma = -90^\circ + \arctan 7\omega_c = -1.16^\circ$$

**题 4.7** 设单位反馈控制系统的开环传递函数分别为 (1)  $G(s) = \frac{\tau s + 1}{s^2}$ ; (2)

$$G(s) = \frac{K}{(0.01s+1)^3}。$$

试确定使系统相位裕度  $\gamma$  等于  $45^\circ$  的  $\tau$  及  $K$  值。

**【解析】** 根据系统的传递函数求解系统的剪切频率, 通过系统的相位裕度求得系统的  $\tau$  及  $K$  值。

解 (1)  $\gamma = \arctan \tau \omega_c = 45^\circ$

解得  $\tau \omega_c = 1$ ,  $|G(j\omega_c)| = 1$ 。

即

$$|G(j\omega_c)| = \frac{\sqrt{1 + (\tau\omega_c)^2}}{\omega_c^2} = 1$$

把  $\tau \omega_c = 1$  带入上式, 解得  $\omega_c = 1.19$ , 则  $\tau = 1/\omega_c = 0.84$ 。

(2)  $\gamma = 180^\circ - 3 \arctan 0.01\omega_c = 45^\circ$

解得  $\omega_c = 100$ ,  $|G(j\omega_c)| = 1$ 。

即

$$|G(j\omega_c)| = \frac{K}{[(0.01\omega_c)^2 + 1]\sqrt{(0.01\omega_c)^2 + 1}} = 1$$

解得  $K = 2.8$ 。

题 4.8 负反馈系统的开环传递函数:

$$G(s) = \frac{K}{s(0.01s^2 + 0.01s + 1)}$$

试求系统幅值裕度为 20dB 的  $K$  值, 并求对应的相位裕度。

【解析】根据系统的传递函数求解系统的  $\omega_g$ , 通过系统的幅值裕度求得系统的  $K$  值, 从而求得剪切频率, 再求得系统相对的相位裕度。

解 令  $\varphi(\omega_g) = -180^\circ$ , 即

$$\varphi(\omega_g) = -90^\circ - \arctan\left(\frac{0.01\omega_g}{1 - 0.01\omega_g^2}\right) = -180^\circ$$

解得  $\omega_g = 10$ 。

$$K_g = -20\lg \frac{K}{\omega_g \sqrt{(1 - 0.01\omega_g^2)^2 + (0.01\omega_g)^2}} = 20$$

即

$$\frac{K}{\omega_g \sqrt{(1 - 0.01\omega_g^2)^2 + (0.01\omega_g)^2}} = 0.1$$

将  $\omega_g = 10$  带入上式得  $K = 0.1$ 。

$$|G(j\omega_c)| = \frac{0.1}{\omega_c \sqrt{(1 - 0.01\omega_c^2)^2 + (0.01\omega_c)^2}} = 1$$

解得  $\omega_c = 0.1$ , 则

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan\left(\frac{0.01\omega_c}{1-0.01\omega_c^2}\right) = 89.9^\circ$$

**题 4.9** 一单位反馈系统的开环对数幅频渐近曲线如图 4-19 所示, 且开环具有最小相位性质。(1) 试写出系统开环传递函数的表达式; (2) 试判别闭环系统的稳定性; (3) 将幅频曲线向右平移 10 倍频程, 讨论系统阶跃响应性能指标  $\sigma\%$ 、 $t_s$  及  $e_{ss}$  的变化。

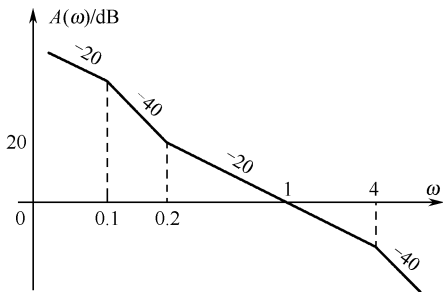


图 4-19 单位反馈系统的开环对数幅频渐近曲线

**【解析】** 根据系统的幅频特性曲线求得系统的传递函数, 求得系统的相位裕度判别系统的稳定性; 当幅频特性曲线向右平移 10 倍频程时,  $\gamma$  不变而  $\omega_c$  增大 10 倍, 从而求得能指标  $\sigma\%$ 、 $t_s$  及  $e_{ss}$  的变化。

**解** (1) 由图 4-19 所示可写出系统的开环传递函数:

$$G(s) = \frac{K(\frac{s}{0.2} + 1)}{s(\frac{s}{0.1} + 1)(\frac{s}{4} + 1)}$$

$$|G(j\omega)|_{\omega_c=1} = \frac{K\sqrt{\left(\frac{\omega_c}{0.2}\right)^2 + 1}}{\omega_c\sqrt{\left(\frac{\omega_c}{0.1}\right)^2 + 1}\sqrt{\left(\frac{\omega_c}{4}\right)^2 + 1}} = \frac{5K}{10} = 1$$

则  $K = 2$ 。

故

$$G(s) = \frac{K(\frac{s}{0.2} + 1)}{s(\frac{s}{0.1} + 1)(\frac{s}{4} + 1)} = \frac{2(5s + 1)}{s(10s + 1)(0.25s + 1)}$$

(2) 求系统的相位裕度:

$$\begin{aligned}\gamma &= 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 10\omega_c - \arctan 0.25\omega_c + \arctan 5\omega_c \\ &= 90^\circ - \arctan 10 - \arctan 0.25 + \arctan 5 = 90^\circ - 84.3^\circ - 14^\circ + 78.7^\circ \\ &= 70.4^\circ > 0\end{aligned}$$

所以闭环系统稳定。

(3) 当幅频特性曲线向右平移 10 倍频程时,  $\gamma$  不变而  $\omega_c$  增大 10 倍, 则  $\sigma\%$ 、 $t_s$  及  $e_{ss}$  为

$$\sigma\% = 0.16 + 0.4 \left( \frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right) = 0.16 + 0.4 \left( \frac{1}{\sin 70.4^\circ} - 1 \right) = 18.4\%$$

$$t_s = \frac{\pi}{\omega_c} \left[ 2 + 1.5 \left( \frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right) + 2.515 \left( \frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right)^2 \right]$$

$$= \frac{3.14}{10} \left[ 2 + 1.5 \left( \frac{1}{\sin 70.4^\circ} - 1 \right) + 2.515 \left( \frac{1}{\sin 70.4^\circ} - 1 \right)^2 \right] = 0.66$$

$$e_{ss} = \frac{1}{10K} = 0.05$$

**题 4.10** 已知非最小相位系统的开环传递函数为  $G(s)H(s) = \frac{K(s-1)}{s(s+1)}$ , 试由频率稳定性判别判别闭环系统的稳定性。

**【解析】** 根据 Nyquist 判据求解使系统稳定时的  $K$  的取值范围。

$$\begin{aligned} \text{解 } G(s)H(s) &= \frac{K(s-1)}{s(s+1)} = \frac{K(j\omega-1)}{j\omega(j\omega+1)} \\ &= \frac{2K}{\omega^2+1} + j \frac{K-\omega^2K}{\omega^3+\omega} = X(\omega) + jY(\omega) \end{aligned}$$

取  $\omega=0$ , 得  $X(0)=2K$ ,  $Y(0)=\infty$ 。

当  $\omega \rightarrow \infty$  时,  $X(\infty)=0$ ,  $Y(\infty)=0$ 。

令  $Y(\omega)=0$ , 解出  $\omega=1$ 。

代入  $X(\omega)$  表达式并令其绝对值小于 1, 即  $|X(1)|=K<1$ 。

得  $0 < K < 1$ 。

# 第5章 控制系统校正

## 5.1 基本要求及重难点

### 基本要求

- 了解系统的时域性能指标、频域性能指标和综合性能指标；掌握系统时频性能指标的相互关系和转换；
- 掌握系统校正的基本概念和校正类型；
- 掌握系统设计与校正的一般原则；
- 熟悉各种校正方式和校正装置，掌握相位超前校正、相位滞后校正和相位滞后-超前校正的设计分析方法和步骤；
- 了解并联校正中的反馈校正、顺馈校正及复合校正方式；
- 掌握 PID 控制规律和控制器的选用类型；
- 掌握按典型 I 型、II 型系统进行系统设计分析的基本方法和过程。

### 教学重点

- 系统时频性能指标及相互转换；
- 串联无源相位超前校正，相位滞后校正和相位滞后-超前校正装置的频率特性及其设计方法；
- PID 校正规律及 PID 调节器的工程设计方法；
- 典型 I 型、II 型系统优化设计方法。

### 教学难点

- 各种串联无源校正装置的设计；
- PID 调节器的工程设计方法。

## 5.2 本章学习指导

### 5.2.1 系统校正概述

#### 1. 校正的概念

控制系统设计一般包含两部分：设计过程中的不可变部分（如执行机构、功率放大器和检

测装置等)和计算参数有较大选择范围的可变部分(如放大器和校正装置)。不可变部分的选择受尺寸、质量、成本等因素及性能指标的约束,往往不能完全满足性能要求,需要引入校正装置来补偿不可变部分在性能指标方面的不足。

系统校正就是在系统中增加新的环节,以改善系统性能。引入校正环节的实质是改变系统的零点和极点分布,改变系统的频率特性,以达到改善系统性能的目标。

系统校正实际上是系统最优设计问题,系统优化时,能够全面满足性能指标的系统并不是唯一的。为了保证良好的控制性能以及顾及工艺性、经济性、使用寿命、体积、重量等因素,选取最优的系统校正方案。

2. 校正方式

(1) 串联校正:把校正装置  $G_c(s)$  串联在系统固有部分的前向通道中,如图 5-1 (a) 所示。

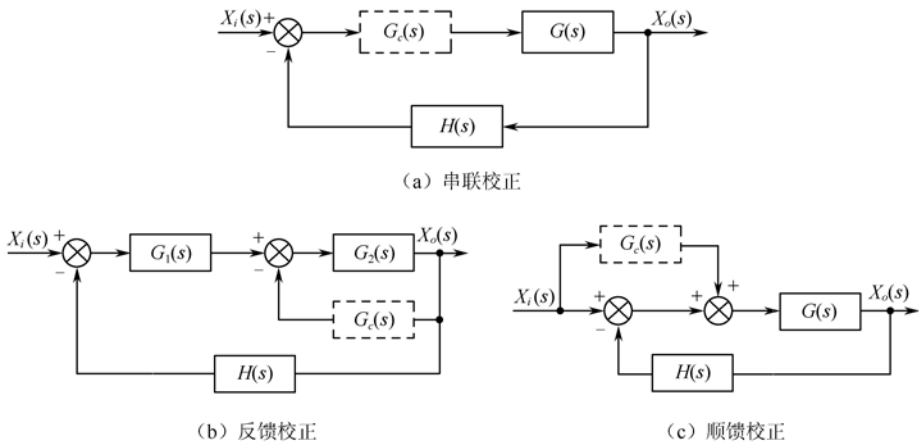


图 5-1 系统校正方式

按校正装置  $G_c(s)$  的性质,串联校正可分为增益调整、相位超前校正、相位滞后校正和相位滞后-超前校正四种形式。串联校正装置通常放在前向通道中功率等级最低的位置上。

(2) 并联校正:并联校正包含反馈校正和顺馈校正。校正装置与系统固有部分按反馈连接形成局部反馈回路,称为反馈校正,如图 5-1 (b) 所示。顺馈校正是在反馈控制基础上引入输入补偿构成的校正方式,如图 5-1 (c) 所示。

3. 无源校正和有源校正

根据校正装置本身是否有电源,可分为无源校正装置和有源校正装置。

无源校正装置线路简单、组合方便、不需要外供电源,但本身没有增益,只有衰减;且输入阻抗低,输出阻抗高,在应用时要增设放大器或隔离放大器。根据无源校正装置对频率特性的影响,可分为相位滞后校正、相位超前校正和相位滞后-超前校正。

有源校正装置是由运算放大器组成的调节器。有源校正装置本身有增益,且输入阻抗高、输出阻抗低,其缺点是需要另供电源。

## 5.2.2 控制系统时频性能指标及转换关系

### 1. 时域性能指标

时域性能指标包括瞬态性能指标和稳态性能指标。

(1) 瞬态性能指标：系统的时域瞬态性能指标形式选择为二阶欠阻尼系统在单位阶跃输入下的单位阶跃响应，主要包括上升时间  $t_r$ 、峰值时间  $t_p$ 、最大超调量  $M_p$ 、调整时间  $t_s$ 。

(2) 稳态性能指标：用于描述系统在过渡过程结束后，实际输出与期望输出之间的差值，常用稳态误差表征，反映系统的稳态精度。

### 2. 频域性能指标

频域性能指标包括开环频域指标和闭环频域指标。

(1) 开环频域指标：主要包括相位裕度  $\gamma$ 、幅值裕度  $K_g$ 、剪切频率  $\omega_c$  等。

(2) 闭环频域指标：主要包括复现频率  $\omega_M$  及复现带宽  $0 \sim \omega_M$ 、谐振频率  $\omega_r$  及谐振峰值  $M_r$ 、截止频率  $\omega_b$  及截止带宽  $0 \sim \omega_b$ 。

### 3. 误差准则

误差准则（综合性能指标）是系统性能的综合测度，是指系统期望输出与实际输出之差的某个函数的积分。系统参数取最优时，综合性能指标将取极值，从而可以通过选择适当参数得到综合性能指标为最优的系统。

(1) 误差积分性能指标。设误差为  $e(t) = x_{or}(t) - x_o(t)$ ，则系统综合性能指标为

$$I = \int_0^{\infty} e(t) dt \quad (5-1)$$

只要系统在阶跃输入下其过渡过程无超调，就可以根据式 (5-1) 计算出使  $I$  值最小的系统参数。

(2) 误差平方积分性能指标。若给系统单位阶跃输入后其响应过程有振荡，则常取误差平方的积分为系统的综合性能指标。

$$I = \int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad (5-2)$$

此指标的特点是：重视大误差，忽略小误差。因为较大的误差其平方也更大，对性能指标  $I$  的影响显著；较小的误差其平方更小，对性能指标  $I$  的影响轻微甚至可以忽略。根据误差平方积分性能指标设计的系统，能使大的误差迅速减小，但系统也容易产生振荡。

(3) 广义误差平方积分性能指标。给定的加权系数  $\alpha$ ，广义误差平方积分性能指标定义为

$$I = \int_0^{\infty} [e^2(t) + \alpha e^2(t)] dt \quad (5-3)$$

此指标的特点是既不允许大的动态误差长期存在，也不允许大的误差变化率长期存在。按此准则设计的系统，过渡过程较短而且平稳。



#### 4. 时、频域性能指标的关联性

系统的时域和频域动态性能指标反映了系统瞬态过程的性能参数,各指标间存在一定关联性和制约性。

(1) 谐振频率乘调整时间与阻尼比的关联:

$$\omega_r t_s = \frac{1}{\xi} \sqrt{1-2\xi^2} \ln \frac{1}{\Delta \sqrt{1-\xi^2}} \quad (5-4)$$

$\omega_r$  乘  $t_s$  仅与  $\xi$  有关。对于给定  $\xi$ ,  $t_s$  与系统的  $\omega_r$  成反比,即谐振频率高的系统,其反应速度快;反之则反应速度慢。

(2) 谐振频率乘调整时间与谐振峰值的关联:

$$\omega_r t_s = \sqrt{\frac{2\sqrt{M_r^2-1}}{M_r-\sqrt{M_r^2-1}}} \ln \frac{\sqrt{2M_r}}{\Delta \sqrt{M_r+\sqrt{M_r^2-1}}} \quad (5-5)$$

(3) 截止频率乘调整时间与阻尼比的关联:

$$\omega_b t_s = \frac{1}{\xi} \sqrt{1-2\xi^2 + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2}} \ln \frac{1}{\Delta \sqrt{1-\xi^2}} \quad (5-6)$$

给定  $\xi$  后,系统频宽  $\omega_b$  与调整时间  $t_s$  成反比。即控制系统的频宽越大,则该系统反应输入信号的快速性越好。

(4) 截止频率乘调整时间与谐振峰值的关联:

$$\omega_b t_s = \sqrt{\frac{2\sqrt{M_r^2-1} + \sqrt{2M_r^2-1}}{M_r-\sqrt{M_r^2-1}}} \ln \frac{\sqrt{2M_r}}{\Delta \sqrt{M_r+\sqrt{M_r^2-1}}} \quad (5-7)$$

(5) 谐振峰值与最大超调量的关联:

$$M_p = \exp\left(-\pi \sqrt{\frac{M_r-\sqrt{M_r^2-1}}{M_r+\sqrt{M_r^2-1}}}\right) \times 100\% \quad (5-8)$$

$M_r$  和  $M_p$  均由阻尼比  $\xi$  确定,均随  $\xi$  的减小而增大。系统在时域中  $M_p$  大,反映到频域里  $M_r$  也大;反之亦然。 $M_r$  越大,系统阶跃响应的超调量也越大,系统的平稳性较差。

### 5.2.3 系统的无源校正

#### 1. 一般原则

系统的开环传递函数和具有单位反馈的闭环传递函数之间有确切的对应关系,决定闭环系统稳定性的特征方程又完全取决于开环传递函数,因此用频率法进行设计时,通常在开环 Bode 图上进行。对系统性能指标的要求最终可归结为对系统开环频率特性的要求,因而系统设计与校正的实质就是对开环 Bode 图进行整形。校正的一般原则如下:

(1) 在低频段要有足够高的增益,用最小误差来跟踪输入,以保证系统稳态精度。

(2) 在中频段 (增益剪切频率附近频段), 对数幅频特性曲线穿过 0dB 线的斜率在 -20dB/dec 左右, 以保证系统的稳定性。

(3) 在高频段, 开环幅频特性曲线尽可能快地衰减, 以减小高频噪声对系统的干扰。

## 2. 相位超前校正

单纯增加开环增益会提高开环剪切频率  $\omega_c$ , 系统带宽  $\omega_b$  增加, 响应速度提高。同时带来的弊端是相位裕度  $\gamma$  减小, 系统稳定性下降。如果预先在剪切频率  $\omega_c$  及高于它的局部频率范围内使相位提前一些, 即增大相位裕度  $\gamma$ , 这样, 再增加增益就不会使稳定性不可接受。这就是相位超前校正的目的, 既能提高系统的响应速度, 又能保证系统的相对稳定性。

### 1) 相位超前环节的频率特性

相位超前校正环节的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} \quad (5-9)$$

此环节为比例环节、一阶微分环节、惯性环节的串联。相位超前环节的频率特性为

$$G_c(j\omega) = \alpha \frac{jT\omega + 1}{j\alpha T\omega + 1} \quad (5-10)$$

相频特性:

$$\varphi(\omega) = \arctan T\omega - \arctan \alpha T\omega > 0 \quad (5-11)$$

可见, 其相位超前。对数幅频特性为

$$A(\omega) = 20 \lg \alpha + 20 \lg \sqrt{1 + (T\omega)^2} - 20 \lg \sqrt{1 + (\alpha T\omega)^2} \quad (5-12)$$

其频率特性曲线如图 5-2 所示。

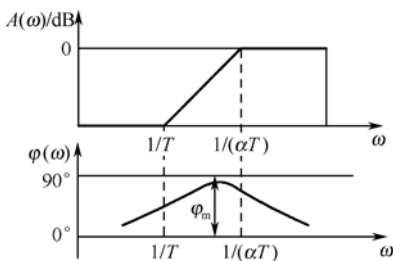


图 5-2 相位超前校正环节的频率特性曲线

相位超前环节的相位角在频率  $\omega_m$  时出现最大值  $\varphi_m$ :

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T} \quad (5-13)$$

在 Bode 图上, 正好是  $1/T$  和  $1/(\alpha T)$  的几何中心。此时, 对应的最大相位角为

$$\varphi_m = \arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad (5-14)$$

### 2) 利用 Bode 图进行相位超前校正的步骤

(1) 作出未校正系统的开环对数幅频特性  $A(\omega)$  和相频特性  $\varphi(\omega)$ , 确定满足稳态性能要求

的开环放大倍数  $K$  值, 计算或由图获得校正前的截止频率  $\omega_c$  和相位稳定裕度  $\gamma$ 。

(2) 计算需要补偿的超前相位角  $\varphi_m$  和衰减因子  $\alpha$ : 令  $\varphi_m = \gamma' - \gamma + (5^\circ \sim 12^\circ)$ 。式中,  $\Delta\gamma = \gamma' - \gamma$  为需要补偿的相位角,  $(5^\circ \sim 12^\circ)$  为增加的裕量角。

$$\alpha = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m}$$

(3) 确定校正后系统的截止频率  $\omega'_c$ : 选择校正前系统的开环对数幅频特性幅值等于  $-10\lg \alpha$  时的频率作为校正后系统的幅值穿越频率  $\omega'_c$  (即截至频率)。如果对校正后系统的截止频率  $\omega'_c$  已经提出要求, 则可以选择期望的  $\omega'_c$  作为校正后的截止频率。

(4) 确定校正环节传递函数: 校正装置的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{1 + s/\omega_1}{1 + s/\omega_2}$$

式中,  $\omega_1 = \frac{1}{\alpha T} = \frac{\omega'_c}{\sqrt{\alpha}}$ ;  $\omega_2 = \frac{1}{T} = \sqrt{\alpha}\omega'_c$ 。校正后系统的开环传递函数为  $G'(s) = G(s)G_c(s)$ 。

(5) 校验性能指标及确定校正环节参数: 由校正后系统的对数频率特性  $A'(\omega)$ 、 $\varphi'(\omega)$  校验系统的性能指标是否满足要求。若不满足, 则要重复上述的步骤, 直至满足要求为止。

### 3. 相位滞后校正

当控制系统具有良好的动态性能而稳态误差较大时, 为减少稳态误差同时又不影响稳定性和响应速度, 只需采用相位滞后校正加大低频段增益即可。

#### 1) 相位滞后环节的频率特性

相位滞后校正环节的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} \quad (5-15)$$

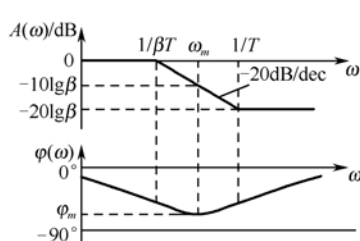
频率特性:

$$G_c(j\omega) = \frac{jT\omega + 1}{j\beta T\omega + 1} \quad (5-16)$$

相频特性:

$$\varphi(\omega) = \arctan T\omega - \arctan \beta T\omega < 0 \quad (5-17)$$

其相位滞后。对数幅频特性为



$$A(\omega) = 20\lg \sqrt{1 + (T\omega)^2} - 20\lg \sqrt{1 + (\beta T\omega)^2} \quad (5-18)$$

其开环频率特性曲线如图 5-3 所示。

相位滞后环节的相位角在频率  $\omega_m$  时出现最大值  $\varphi_m$ :

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\beta T}} \quad (5-19)$$

图 5-3 相位滞后环节的开环频率特性曲线 在 Bode 图上, 正好是  $1/(\beta T)$  和  $1/T$  对数坐标的几何中心。

$$\varphi_m = \arcsin \frac{1-\beta}{1+\beta} \quad (5-20)$$

2) 利用 Bode 图进行相位滞后校正的步骤

(1) 作系统开环 Bode 图, 计算开环增益  $K$ , 计算校正前系统相位裕度  $\gamma$ 。

(2) 确定校正后剪切频率  $\omega_c'$ 、校正环节  $\beta$  值和转角频率  $\frac{1}{T}$  及  $\frac{1}{\beta T}$ 。

(3) 确定校正环节的传递函数及校正后的系统传递函数。

#### 4. 相位滞后-超前校正

相位超前校正环节可增加频宽、提高快速性, 使稳定裕度加大并改善平稳性, 但增益损失而不利于稳态精度。滞后校正可提高平稳性及稳态精度, 但降低了快速性。相位滞后-超前校正环节兼具超前环节和滞后环节的作用, 可全面提高系统的控制性能。

1) 相位滞后-超前环节的频率特性

相位滞后-超前环节的传递函数如下:

$$G_c(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{(T_1s+1)(T_2s+1)}{(\frac{T_1}{\beta}s+1)(\beta T_2s+1)} \quad (5-21)$$

频率特性为

$$G_c(j\omega) = \frac{jT_1\omega+1}{j\frac{T_1}{\beta}\omega+1} \cdot \frac{jT_2\omega+1}{j\beta T_2\omega+1} \quad (5-22)$$

相位滞后-超前校正环节的 Bode 图如图 5-4 所示。

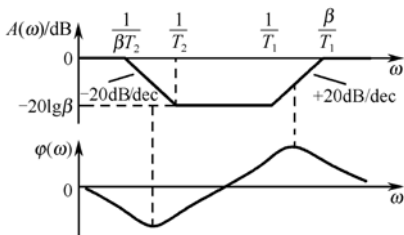


图 5-4 相位滞后-超前环节的 Bode 图

其转角频率  $\omega_r$  分别为  $\frac{1}{\beta T_2}$ 、 $\frac{1}{T_2}$ 、 $\frac{1}{T_1}$  和  $\frac{\beta}{T_1}$ , 滞后环节在前, 超前环节在后, 且高频段和低频段均无衰减。

2) 利用 Bode 图进行相位滞后-超前校正的步骤

(1) 根据稳态性能要求确定开环增益  $K$  值, 求出待校正系统的  $\omega_c$ 、 $\gamma$ 、 $K_g$ 。

(2) 在待校正系统的对数幅频特性上, 选择斜率从  $-20\text{dB/dec}$  变为  $-40\text{dB/dec}$  转折频率作为校正装置超前部分的转折频率。这种选法可以降低已校正系统阶次, 可以保证中频区斜率为希望的  $-20\text{dB/dec}$ , 并可占据较宽的频带。再根据响应裕度的要求选择已校正系统的剪切频率

$\omega_c$  和校正装置的衰减因子  $\beta$ 。根据相位裕度的要求估算校正装置滞后部分的转角频率。

(3) 验算性能指标, 选择校正装置元件参数。

## 5. 反馈校正

在工程中当系统参数经常变化而又能取出适当的反馈信号时, 采用反馈校正是合适的, 而且还能消除系统不可变部分中被反馈所包围的那部分环节的参数波动对系统性能的影响。

反馈校正可分为硬反馈和软反馈。硬反馈校正装置的主体是比例环节  $G_c(s) = \alpha$  (可能还含有小惯性环节), 在系统的动态和稳态过程中都起反馈校正作用; 软反馈校正装置的主体是微分环节  $G_c(s) = \alpha s$  (可能还含有小惯性环节), 只在系统的动态过程中起反馈校正作用, 在稳态时反馈校正支路如同断路, 不起作用。

反馈校正通过改变系统被包围环节的结构和参数, 使系统的性能达到所要求的指标。

(1) 对系统的比例环节进行局部反馈: 采用硬反馈, 对于那些因为增益过大而影响系统性能的环节, 采用硬反馈是一种有效的方法; 采用软反馈可使动态过程变得平缓, 对于希望过渡过程平缓的系统, 常采用软反馈。

(2) 对系统的积分环节进行局部反馈: 含有积分环节的单元被硬反馈包围后, 积分环节变为惯性环节, 有利于系统的稳定, 但稳态性能变差; 采用软反馈, 校正后的传递函数仍为积分环节, 增益下降。

(3) 对系统的惯性环节进行局部反馈: 采用硬反馈, 惯性环节时间常数和增益均下降, 可以提高系统的稳定性和快速性; 采用软反馈, 校正后的传递函数仍为惯性环节, 时间常数增加, 可以消除系统固有部分中不希望有的特性, 从而可以削弱被包围环节对系统性能的不利影响。

## 6. 顺馈校正

在高精度控制系统中, 在保证系统稳定的同时, 还要减小甚至消除系统误差和干扰的影响。为此, 可以在反馈控制回路中加入顺馈装置, 组成一个复合校正系统。

顺馈校正的特点是不依靠偏差而直接测量干扰, 在干扰引起误差之前就对它进行近似补偿, 及时消除干扰的影响。对系统进行顺馈补偿的前提是干扰可以测出。

加入顺馈校正后, 系统的稳定性没有受到影响, 因为系统特征方程不变。这是因为顺馈补偿为开环补偿, 其传递路线没有参加到原闭环回路中去。

在工程实际中, 系统的传递函数较复杂, 完全实现补偿条件较困难。

## 5.2.4 PID 校正与典型设计

有源校正环节在工程控制系统中应用广泛, 常称为调节器或控制器。其中, 按偏差的比例 (Proportional)、积分 (Integral) 和微分 (Derivative) 进行控制的 PID 调节器是应用最为广泛的一种调节器。

### 1. PID 控制规律

PID 控制规律是一种对偏差  $\varepsilon(t)$  进行比例、积分、微分变换的控制规律:

$$x_o(t) = K_p \left[ \varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right] \quad (5-23)$$

式中,  $K_p \varepsilon(t)$  为比例控制项,  $K_p$  为比例系数;  $\frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau$  为积分控制项,  $T_i$  为积分时间常数;  
 $T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$  为微分控制项,  $T_d$  为微分时间常数。

比例控制项、微分控制项、积分控制项的不同组合分别构成比例控制器 P、比例积分控制器 PI、比例微分控制器 PD、比例积分微分控制器 PID。

### 1) 比例控制器 P

由电阻和运放组成的比例控制有源网络和控制结构框图如图 5-5 所示, 该环节的传递函数如下:

$$G_c(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = K_p = \frac{R_2}{R_1} \quad (5-24)$$

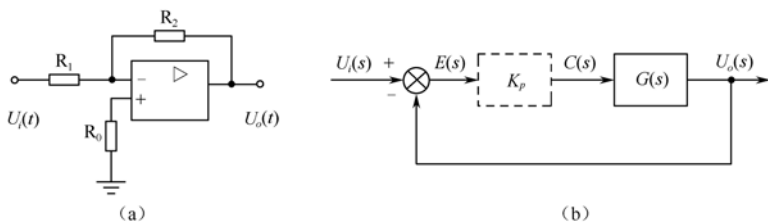


图 5-5 比例控制器

比例控制器的输出与输入反相, 可通过串联一个反相电路解决。比例控制器的作用是调节系统的开环增益, 在保证稳定性下提高开环增益以提高系统的稳态精度和快速性。

### 2) 比例积分控制器 PI

由电阻、电容和运放组成的比例控制有源网络和控制结构框图如图 5-6 所示, 该环节的传递函数如下

$$G_c(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{C(s)}{E(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) \quad (5-25)$$

式中,  $K_p = R_2 / R_1$ ;  $T_i = R_2 C$ 。

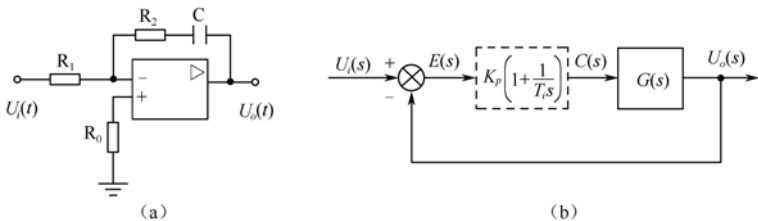


图 5-6 比例积分控制器

PI 控制器的频率特性和系统固有部分的频率特性相加提高了系统的型次, 稳态误差得以消除或减少。同时, 由于提供了负的相位角, 系统相位裕度有所减小, 稳定程度变差。

### 3) 比例微分控制器 PD

比例积分控制器的有源网络和控制结构框图如图 5-7 所示, 该环节的传递函数如下:

$$G_c(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{C(s)}{E(s)} = K_p(1 + T_d s) \tag{5-26}$$

式中， $K_p = R_2 / R_1$ ； $T_d = R_1 C$ 。

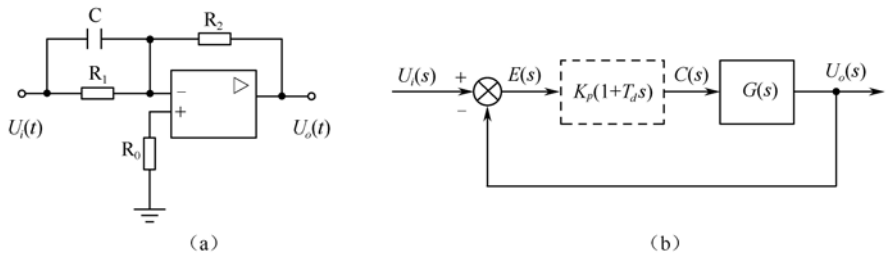


图 5-7 比例积分控制器

PD 控制器提供了正的相位角，可增加系统相位裕度，稳定性增强；剪切频率右移，系统的快速性提高。PD 控制器提高了系统的动态性能，但由于在高频段，增益上升，使系统抗干扰能力减弱。

4) 比例积分微分控制器 PID

比例积分控制器的有源网络和控制结构框图如图 5-8 所示，该环节的传递函数如下：

$$G_c(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{C(s)}{E(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \tag{5-27}$$

式中， $K_p = \frac{R_1 C_1 + R_2 C_2}{R_1 C_2}$ ； $T_i = R_1 C_1 + R_2 C_2$ ； $T_d = \frac{R_1 C_1 R_2 C_2}{R_1 C_1 + R_2 C_2}$

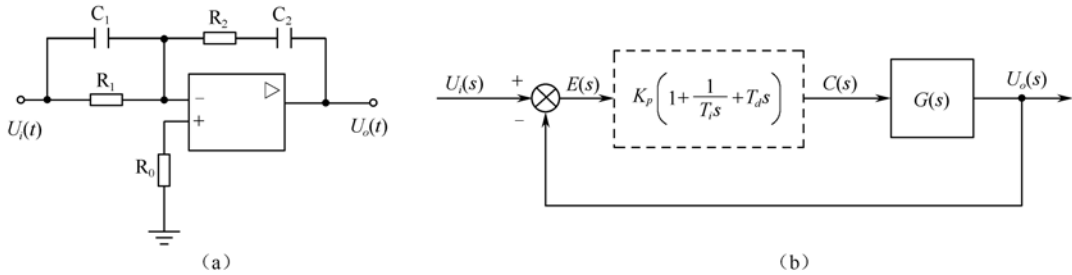


图 5-8 比例积分微分控制器

PID 控制器在低频段起积分作用，改善系统的稳态性能；在中频段起微分作用，改善系统的动态性能；高频配以噪声滤波环节，可方便调整其比例系数和时间常数，因而得到了广泛应用。

在 PID 控制器中，比例系数  $K_p$  直接决定控制作用的强弱，加大  $K_p$  可减少系统稳态误差，提高系统动态响应速度，但  $K_p$  过大会使动态质量变坏，引起被控制量振荡甚至导致闭环系统不稳定。比例积分控制可以消除系统稳态误差，但这同时减缓了系统动态过程，过强的积分作用会使系统的超调量增大，给系统稳定性带来负面影响。微分的控制作用和偏差的变换率有关，能够预测偏差，产生超前的校正作用，有助于减少超调和振荡，使系统趋于稳定，并能增加系统带宽、加快响应速度、减少调整时间，从而改善系统动态性能。

## 2. PID 控制器设计

PID 控制器的设计常按所期望的特性进行,其基本思想是根据工程实际要求确定校正后系统应具有的频率特性,比较原系统和期望特性,求出控制器的传递函数和有源网络的物理参数。

由于 0 型系统存在稳态误差,III 型及其以上系统的稳定性差,所以具有期望特性的系统往往是 I 型和 II 型系统。工程上,称具有期望特性的 I 型和 II 型系统分别为典型 I 型系统和典型 II 型系统。

### 1) 典型 I 型系统 (二阶期望特性系统)

典型二阶系统框图和开环 Bode 图如图 5-9 所示,其闭环传递函数如下:

$$G_B(s) = \frac{K}{Ts^2 + s + K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5-28)$$

式中,  $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}}$ , 为无阻尼固有频率;  $\xi = \frac{1}{2\sqrt{KT}}$ , 为阻尼比。

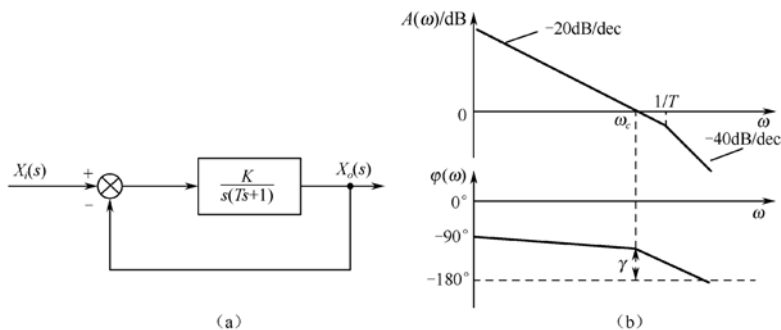


图 5-9 典型 I 型系统框图和开环 Bode 图

当阻尼比  $\xi = 0.707$  时,超调量  $M_p = 4.3\%$ ,调节时间  $t_s = 6T$ 。故  $\xi = 0.707$  的阻尼比在工程上称为最佳阻尼系数。此时的转折频率  $1/T = 2\omega_c$ 。要保证  $\xi = 0.707$  并不容易,工程上  $\xi$  的取值在 0.5 和 0.8 之间。

### 2) 典型 II 型系统 (三阶期望特性系统)

典型二阶系统的框图和开环 Bode 图如图 5-10 所示,该环节的传递函数如下:

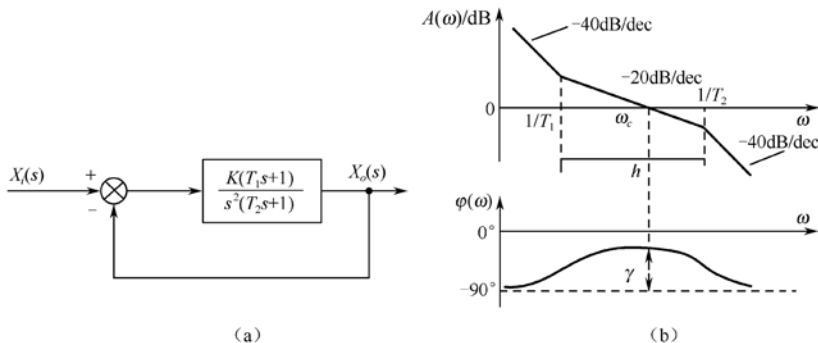


图 5-10 典型 II 型系统框图和开环 Bode 图



$$G(s) = \frac{K(T_1s+1)}{s^2(T_2s+1)}, \quad T_1 > T_2 \quad (5-29)$$

典型 II 型系统的  $T_1$  比  $T_2$  大得越多, 相位裕度就越大。当  $T_2$  一定时, 可通过改变  $T_1$  来控制中频宽  $h$ 。按典型 II 型系统设计系统时, 常采用谐振峰值最小原则。当  $M_r$  在 1.2~1.5 之间取值时, 系统有较好的动态特性, 且  $h$  值越大, 系统的稳定性越好, 谐振峰值越小。

### 5.3 例题题解

**例 5.1** 已知某单位反馈系统未校正时的开环传递函数  $G(s)$  和校正装置  $G_c(s)$  的对数幅频特性渐近线如图 5-11 所示。(1) 写出校正后的传递函数; (2) 画出校正后的对数幅频特性渐近线。

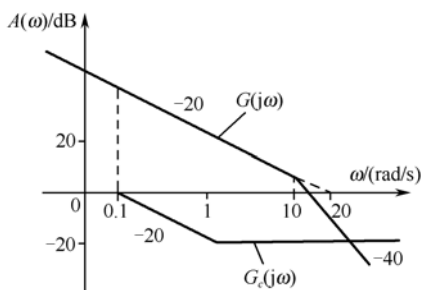


图 5-11 例 5.1 图

**解** (1) 根据已知系统开环传递函数的对数幅频特性曲线渐近线的形状, 其低频渐近线斜率为  $-20\text{dB/dec}$ , 系统为 I 型系统含有一个积分环节; 在  $\omega=10\text{rad/s}$  处, 渐近线斜率变为  $-40\text{dB/dec}$ , 则系统含有惯性环节  $\frac{1}{0.1j\omega+1}$ 。所以未校正系统的开环频率特性应该为

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(0.1j\omega+1)}$$

根据图 5-11 所示条件, 当  $\omega=20\text{rad/s}$  时, 对数幅频特性为

$$A(\omega) = 20\lg K - 20\lg 20 = 0, \quad K = 20$$

校正装置  $G_c(s)$  的对数幅频特性曲线渐近线的低频段为  $0\text{dB}$  线, 说明校正装置无积分环节; 在  $\omega=0.1\text{rad/s}$  处, 渐近线斜率变为  $-20\text{dB/dec}$ , 说明校正装置含有惯性环节  $\frac{1}{10j\omega+1}$ ; 在  $\omega=1\text{rad/s}$  处, 渐近线斜率变为  $0$ , 说明校正装置含有一阶微分环节  $j\omega+1$ 。故校正装置的频率特性为

$$G_c(j\omega) = \frac{j\omega+1}{10j\omega+1}$$

校正后系统的开环频率特性为

$$G(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{20(j\omega+1)}{j\omega(10j\omega+1)(0.1j\omega+1)}$$

(2) 该系统由下列典型环节组成:

① 放大环节:  $K = 20$ ;

- ② 一阶积分环节:  $\frac{1}{j\omega}$  (I 型系统);
- ③ 惯性环节 1:  $\frac{1}{10j\omega+1}$ , 转角频率  $\omega_1 = 1/10 = 0.1$ ;
- ④ 一阶微分环节:  $j\omega+1$ , 转角频率  $\omega_2 = 1$ ;
- ⑤ 惯性环节 2:  $\frac{1}{0.1j\omega+1}$ , 转角频率  $\omega_3 = 1/0.1 = 10$ 。

按转角频率  $\omega_1$ 、 $\omega_2$ 、 $\omega_3$  顺序作出各典型环节的 Bode 图并叠加, 便得到如图 5-12 所示的已校正系统的 Bode 图。

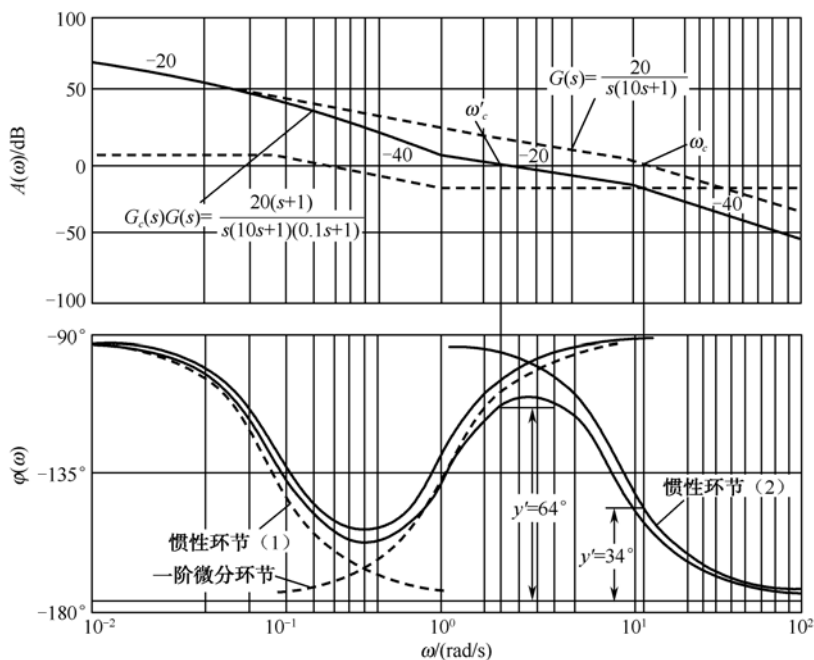


图 5-12 已校正系统的 Bode 图

**例 5.2** 某单位反馈系统的开环传递函数如下, 假设采用 3 种校正方式如图 5-13 所示, 问 3 种校正特性中, 哪一种可使校正后的系统的稳定性最好?

$$G(s) = \frac{400}{s^2(0.01s+1)}$$

**解** 图 5-13 (a) 的校正曲线为滞后校正, 有两个转角频率  $\omega_1 = 0.1 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_2 = 1 \text{ rad/s}$ , 传递函数为

$$G_{ca}(s) = \frac{s+1}{10s+1}$$

校正后的传递函数为

$$G(s)G_{ca}(s) = \frac{400(s+1)}{s^2(10s+1)(0.01s+1)}$$

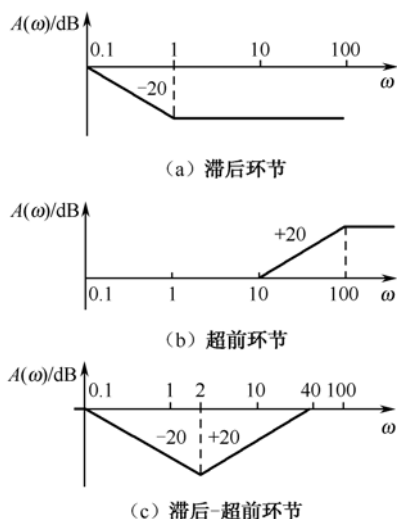


图 5-13 校正环节的 Bode 图

图 5-13 (b) 所示的校正曲线为超前校正, 有两个转角频率  $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_2 = 100 \text{ rad/s}$ , 传递函数为

$$G_{cb}(s) = \frac{0.1s + 1}{0.01s + 1}$$

校正后的传递函数为

$$G(s)G_{cb}(s) = \frac{400(0.1s + 1)}{s^2(0.01s + 1)^2}$$

图 5-13 (c) 所示的校正曲线为滞后-超前校正, 有三个转角频率  $\omega_1 = 0.1 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_2 = 2 \text{ rad/s}$ , 根据相似原理求  $\omega_3$ 。

$$\text{因为 } \frac{-20}{\lg 10 - \lg 1} = \frac{-y}{\lg 2 - \lg 0.1}, \text{ 得 } y = 20(\lg 2 + 1) = 26 \text{ dB}。$$

$$\text{由 } \frac{-20}{\lg 10 - \lg 1} = \frac{-26}{\lg \omega_3 - \lg 2}, \text{ 得 } \lg \omega_3 = \frac{26}{20} + \lg 2 = 1.6, \text{ 求出 } \omega_3 = 40 \text{ rad/s}。$$

传递函数为

$$G_{cc}(s) = \frac{(0.5s + 1)^2}{(10s + 1)(0.02s + 1)}$$

校正后的传递函数为

$$G(s)G_{cc}(s) = \frac{400(0.5s + 1)^2}{s^2(10s + 1)(0.025s + 1)(0.01s + 1)}$$

在同一个对数坐标上分别画出三种校正后的系统开环对数幅频特性和相频特性。可见, 原系统开环传递函数  $G(s)$  为 II 型系统并含有惯性环节, 相位滞后严重。如果用图 5-13 (a) 所示滞后特性来校正, 无稳定裕量可言, 系统不能稳定工作。如果用图 5-13 (b) 所示超前特性来校正, 可提高中频段的增益, 扩展了频宽, 同时由于存在相位超前, 可提供一定的相位裕度。从图中可知,  $\gamma_b \approx 36^\circ$ ,  $K_{gb} \approx 12 \text{ dB}$ 。如果用图 5-13 (c) 所示的滞后-超前特性来校正, 稳定

裕量较大,  $\gamma_b \approx 40^\circ$ ,  $K_{gb} \approx 24 \text{ dB}$ , 但带宽较窄。

**例 5.3** 某系统开环对数幅频特性曲线如图 5-14 (a) 所示, 实线代表校正前系统的对数幅频特性, 点画线代表校正后系统的对数幅频特性。(1) 确定所采用的是何种串联校正, 并写出校正装置的传递函数  $G_c(s)$ ; (2) 确定校正后系统临界稳定时的开环增益  $K$  值; (3) 当开环增益时, 求校正后系统的相位裕度  $\gamma$  和增益裕度  $K_g$ 。

**解** (1) 由校正前后的对数幅频特性曲线可得校正装置的对数幅频特性, 如图中虚线所示。可看出所采用的是串联滞后-超前校正, 校正环节曲线如图 5-14 (b) 所示。

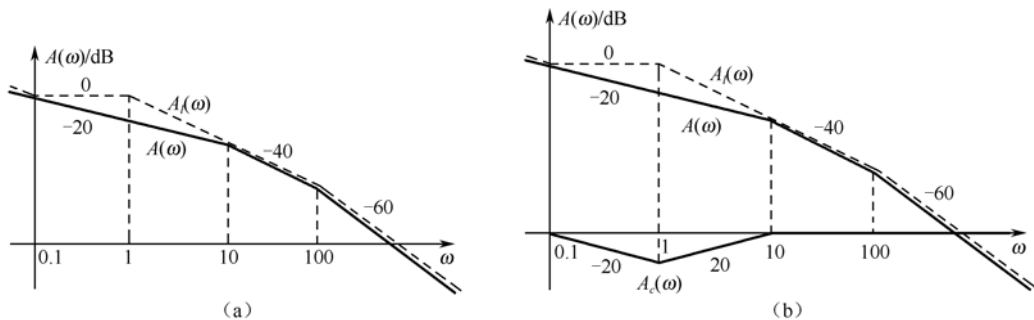


图 5-14 例 5.3 图

可得校正装置的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{(s+1)^2}{(\frac{s}{0.1}+1)(\frac{s}{10}+1)}$$

(2) 校正后系统的开环传递函数为

$$\begin{aligned} G_k(s) &= G_c(s)G(s) = \frac{(s+1)^2}{(\frac{s}{0.1}+1)(\frac{s}{10}+1)} \cdot \frac{K(\frac{s}{0.1}+1)}{s(s+1)^2(\frac{s}{100}+1)} \\ &= \frac{K}{s(0.1s+1)(0.01s+1)} \end{aligned}$$

闭环特征方程为

$$D(s) = s^3 + 110s^2 + 1000s + 1000K = 0$$

列劳斯列表

$s^3$	1	1000
$s^2$	110	1000K
$s^1$	$\frac{110000 - 1000K}{110}$	0
$s^0$	1000K	

若系统稳定, 则劳斯列表中第一列元素全为正, 可得:

$$\begin{cases} 110000 - 1000K > 0 \\ 1000K > 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad 0 < K < 110$$

$$(3) \text{ 当 } K=1 \text{ 时, } G_k(s) = \frac{1}{s(0.1s+1)(0.01s+1)}$$

$$\text{令 } |G_k(j\omega_c)| = 1, \text{ 得 } \omega_c'' = 1。$$

$$\gamma(\omega_c'') = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.1\omega_c'' - \arctan 0.01\omega_c'' = 83.72^\circ$$

$$\text{由 } \varphi(\omega_g) = -90^\circ - \arctan 0.1\omega_g - \arctan 0.01\omega_g = -180^\circ$$

$$\text{得 } \arctan \frac{0.1\omega_g + 0.01\omega_g}{1 - 0.001\omega_g^2} = 90^\circ, \text{ 即 } \omega_g = \sqrt{1000} = 31.6。$$

$$\text{故 } K_g = \frac{1}{|G_k(j\omega_g)|} = 109.8。$$

**例 5.4** 某单位负反馈控制系统的开环传递函数为  $G_0(s) = \frac{k_0}{s(T_0s+1)}$ 。其中,  $k_0 = 200\text{rad/s}$ ,

$T_0 = 0.1\text{s}$ 。试设计一个无源校正网络, 使校正后的静态性能  $K_v \geq 200\text{rad/s}$ , 动态系统  $\omega_c \geq 50\text{rad/s}$ ,  $\gamma \geq 45^\circ$ 。

**解** 按静态要求  $K_v = 200$  画出开环系统的 Bode 图, 如图 5-15 所示。

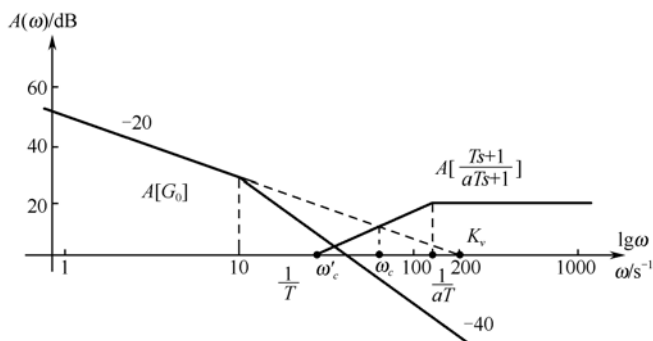


图 5-15 开环系统及超前校正 Bode 图

$$\text{可见 } \omega_c' = \sqrt{10 \times 200} = 44.7 < \omega_c = 50^\circ$$

$$\gamma' = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{\omega_c'}{10} = 12.6 < \gamma$$

动态性能指标不满足要求, 须采用“超前”校正, 增大  $\omega_c$ 、 $\gamma_c$ 。

按动态要求采用无源超前网络串联校正:

$$\varphi_m = \gamma - \gamma' + 5^\circ = 37.4^\circ$$

$$a = \frac{1 - \sin \varphi_m}{1 + \sin \varphi_m} = 0.244$$

$$\text{由 } 40 \lg \frac{\omega_c}{\omega_c'} = 10 \lg \frac{1}{a} \text{ 得 } \omega_c = 63.6; \gamma' = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{\omega_c'}{10} + \varphi_m = 46.3^\circ。 \omega_c、\gamma \text{ 满足}$$

动态设计要求。

$$\frac{1}{T} = \sqrt{a}\omega_c = 31.4; \quad \frac{1}{aT} = \frac{1}{\sqrt{a}}\omega_c = 129; \quad G_c(s) = K_A a \frac{Ts+1}{aTs+1}, \quad K_A = 4.10$$

校正环节传递函数  $G_c(s) = \frac{Ts+1}{aTs+1}$  的 Bode 图也画在图 5-15 上。

**例 5.5** 某单位负反馈系统，其控制对象为  $G_0(s) = \frac{k_0}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$ 。其中， $k_0 = 3\text{rad/s}$ ， $T_1 = 0.5\text{s}$ ， $T_2 = 0.2\text{s}$ 。试设计无源网络校正，使满足以下要求。(1) 静态要求：当系统为最大角速度  $2\text{r/min}$  输出时，输出位置允许误差  $e_{ss}^* < 2^\circ$ ；(2) 动态要求： $5\text{rad/s} \leq \omega_c^* \leq 10\text{rad/s}$ ， $30^\circ \leq \gamma^* \leq 60^\circ$ ， $K_g \geq 60\text{dB}$ 。

**解** (1) 按静态要求求  $K$ 。

$$K = k_c k_0 > \frac{\Omega}{e_{ss}} = \frac{2 \times 360^\circ / 60}{2^\circ} = 6, \quad \text{取 } K = 7.2$$

$$\omega_c' = \sqrt{2 \times 7.2} = 3.79 < \omega_c^*,$$

$$\gamma' = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{\omega_c'}{2} - \arctan \frac{\omega_c'}{5} = -9.34 \ll \gamma^*$$

$\omega_c'$ 、 $\gamma'$  均不满足动态要求，须采用超前校正。

(2) 按动态要求设计无源超前网络校正。由于取  $5 \leq \omega_c \leq 10$  时， $A[G_0]$  在  $\omega_c > 5$  时的斜率为  $-60\text{dB/dec}$ ，如图 5-16 所示，所以采用一个超前网络校正不能奏效的，而需要采用双节超前校正，即采用  $a^2(\frac{Ts+1}{aTs+1})^2$  校正，且两节之间必须加放大器隔离。

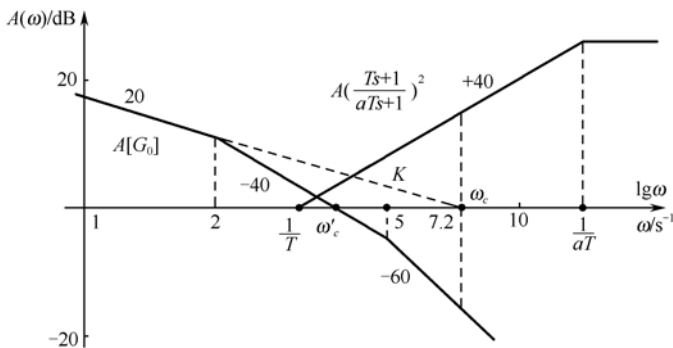


图 5-16 超前校正 Bode 图

试取  $a = 0.18$  并取  $\omega_c = \omega_m$ ，由  $40 \lg \frac{5}{\omega_c} + 60 \lg \frac{\omega_c}{5} = 20 \lg \frac{1}{a}$  得  $\omega_c = 7.36$ 。

而  $\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{\omega_c}{2} - \arctan \frac{\omega_c}{5} + 2 \arcsin \frac{1-a}{1+a} = 47.4^\circ$ 。

当  $\omega = \omega_g$  时， $\varphi(\omega_g) = -180^\circ$  可得  $\omega_g = 18.0$ 。

而  $K_g = 60 \lg \frac{\omega_g}{\omega_c} - 40 \lg \frac{\omega_g}{\omega_c} = 7.76 > 6\text{dB}$ 。

校正结果，动态性能指标完全满足要求。

$$\text{校正环节传递函数 } G_c(s) = k_{A1} k_{A2} a^2 \left( \frac{Ts+1}{aTs+1} \right)^2$$

$$\text{使 } k_{A1} = k_{A2} = k_A, \text{ 则 } k_A^2 a^2 = \frac{k}{k_0}, \quad k_A = \sqrt{\frac{k}{k_0 a^2}} = 8.61, \text{ 并选 } \frac{1}{T} = \sqrt{a}, \quad \omega_c = 3.12 \text{ rad/s},$$

$$\frac{1}{aT} = 17.3 \text{ rad/s}.$$

**例 5.6** 某单位负反馈系统的开环传递函数为  $G_0(s) = \frac{k_0}{s(0.5s+1)(0.1s+1)}$  ( $k_0$  大小可调)。

试设计无源校正网络，使校正后性能指标满足：(1)  $K_v^* \geq 10 \text{ s}^{-1}$ ；(2)  $1 \text{ s}^{-1} \leq \omega_c^* \leq 2 \text{ s}^{-1}$ ， $\gamma^* \geq 40^\circ$ ， $K_g^* \geq 12$ 。

**解** (1) 首先调整  $k_0$  大小，使系统满足动态性能指标要求。

$$\text{由 } \gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.5\omega_c - \arctan 0.1\omega_c - 6^\circ = 40^\circ$$

$$\text{得 } \arctan 0.5\omega_c - \arctan 0.1\omega_c = 44^\circ$$

$$\text{由 } \frac{0.5\omega_c + 0.1\omega_c}{1 - (0.5\omega_c)(0.1\omega_c)} = \tan 44^\circ, \text{ 得 } \omega_c = 1.45.$$

因为  $K_v' = \omega_c = 1.45 < K_v^* = 10$  不满足要求，利用滞后校正抬高低频段。

(2) 采用滞后校正，抬高低频段以增大  $K_v$ 。校正前后 Bode 图如图 5-17 所示。

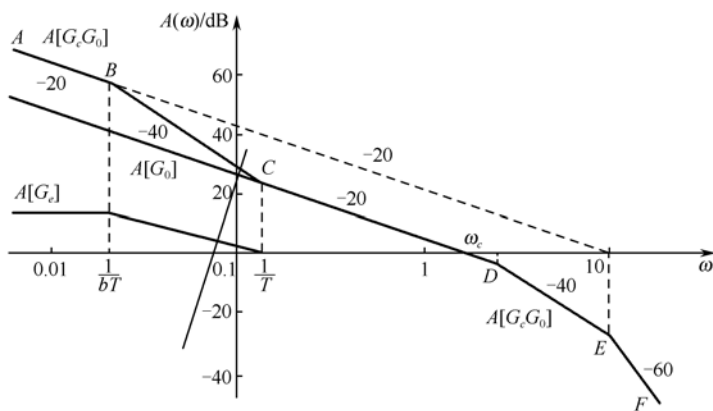


图 5-17 校正前后的 Bode 图

由图可见，需要抬高的分贝数为  $20 \lg b$ ，而  $b = \frac{K_v^*}{K_v'} = 6.90$ ， $20 \lg b = 16.77 \text{ dB}$ 。

取  $\frac{1}{T} = 0.1\omega_c = 0.145$ ，即  $T = 6.90$ ，而  $\frac{1}{bT} = \frac{1}{6.90 \times 6.90} = 0.0210$ ，即  $bT = 47.6$ 。

校正后的 Bode 图为图 5-17 中  $ABCDEF$  线。

校正后的性能指标： $K_v = K_v^* = 10 \text{ rad/s}$ ， $\omega_c = 1.45 \text{ rad/s}$ 。

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.5\omega_c - \arctan 0.1\omega_c - \arctan \frac{\omega_c}{0.0210} + \arctan \frac{\omega_c}{0.145} = 40.9^\circ$$

$\omega = \omega_x$  时,  $A_x = -12$ ,  $2 < \omega_x < 10$ 。

$$\text{由 } -20 \lg \frac{2}{1.45} - 40 \lg \frac{\omega_x}{2} = -12, \text{ 得 } \omega_x = 3.4。$$

$$\begin{aligned} \text{由 } \varphi(\omega_x) &= -90^\circ - \arctan \frac{\omega_x}{2} - \arctan \frac{\omega_x}{10} - \arctan \frac{\omega_x}{0.021} + \arctan \frac{\omega_x}{0.145} \\ &= -170^\circ > -180^\circ \end{aligned}$$

得  $K_g > 12 \text{ dB}$ 。

无源滞后校正传递函数为

$$G_c(s) = \frac{Ts+1}{bTs+1} = \frac{6.90s+1}{47.6s+1}$$

**例 5.7** 某单位负反馈系统的开环传递函数为  $G_0(s) = \frac{K_0}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$  ( $K_0$  大小可调),

$T_1 = 1\text{s}$ ,  $T_2 = 0.1\text{s}$ 。试设计无源校正网络, 使校正后系统性能满足: (1)  $K_v^* \geq 50 \frac{1}{\text{s}}$ ; (2)

$$3 \frac{1}{\text{s}} \leq \omega_c^* \leq 5 \frac{1}{\text{s}}, \quad \gamma^* \geq 0^\circ。$$

**解** 采用单一超前校正或单一滞后校正, 都不能实现校正后的性能指标要求, 因此需要采用超前-滞后校正。

(1) 采用超前校正满足动态性能指标。

$$\text{因为 } \omega_c' = \sqrt{1 \times 5} = 2.24; \quad \gamma' = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \omega_c' - \arctan 0.1\omega_c' = 11.5^\circ。$$

$\omega_c'$ 、 $\gamma'$  都小于期望值, 可采用超前校正, 提高  $\omega_c$ 、 $\gamma$ 。

$$\text{设 } \omega_c = \omega_m, \text{ 取 } \alpha = 0.1。 \text{ 由 } 40 \lg \frac{\omega_c}{\omega_c'} = 10 \lg \frac{1}{\alpha}, \text{ 得 } \omega_m = \omega_c = 3.98 \frac{1}{\text{s}}。$$

$$\text{而 } \gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \omega_c - \arctan 0.1\omega_c + \arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = 47.3^\circ$$

$\gamma > \gamma^* + 6^\circ = 46^\circ$  (滞后校正, 会使  $\gamma$  减小, 需留有裕量)

$$\frac{1}{T_1} = \sqrt{\alpha} \omega_m = 1.26, \quad \frac{1}{\alpha T_1} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \omega_m = 12.6$$

(2) 采用滞后校正, 使满足静态要求。

加入滞后校正, 基本不影响  $\omega_c$  的大小, 只稍微减小  $\gamma$ 。

$$\text{取 } \beta = \frac{1}{\alpha} = 10, \quad \frac{1}{T_2} = 0.1\omega_c = 0.398, \quad \frac{1}{\beta T_2} = 0.0398。$$

$$\text{校正后性能指标: } K_v = K_0 \beta = 50 = K_v^* \omega_c = 3.98, \quad 3 \frac{1}{\text{s}} \leq \omega_c \leq 5 \frac{1}{\text{s}}; \quad \gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) =$$

$42.2^\circ > \gamma^*$ 。得知动态静态性能指标均满足设计指标。

校正前及采用超前-滞后的 Bode 图如图 5-18 所示。



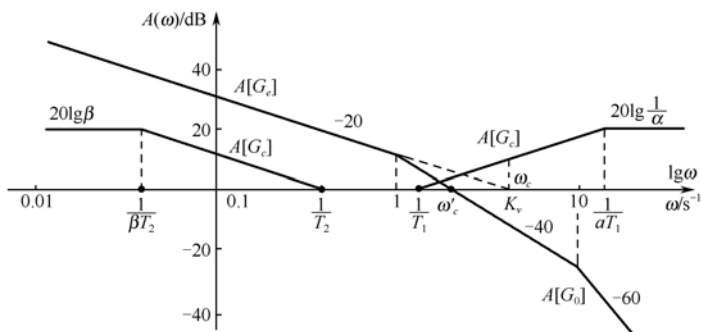


图 5-18 校正前及超前-滞后的 Bode 图

校正装置的  $G_c(s)$  及其无源校正网络实现如图 5-19 所示。

$$G_c(s) = K_A \left( \frac{T_1 s + 1}{\alpha T_1 s + 1} \right) \left( \frac{T_2 s + 1}{\beta T_2 s + 1} \right)$$

式中,  $K_A = \frac{K_v^*}{K_0} = 5$ 。

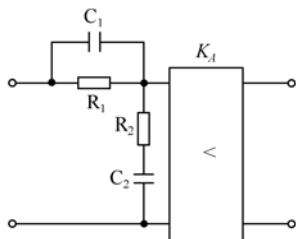


图 5-19 超前-滞后校正环节网络图

图中,  $K_A = 5$ ;  $T_1 = R_1 C_1 = 0.794\text{s}$ ;  $T_2 = R_2 C_2 = 2.5\text{ls}$ ;  $\alpha = 0.1$ ;  $\beta = 10$ 。

例 5.8 某单位负反馈系统采用局部反馈如图 5-20 所示。

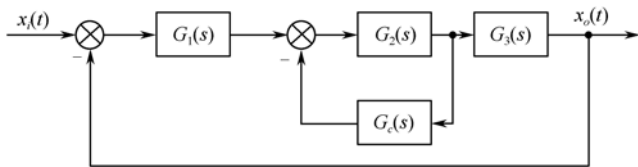


图 5-20 局部反馈校正框图

图中,  $G_1(s) = \frac{K_1}{0.01s + 1}$ ;  $G_2(s) = \frac{12}{(0.1s + 1)(0.02s + 2)}$ ;  $G_3(s) = \frac{0.0025}{s}$ 。试设计反馈校正

装置  $G_c(s)$ , 使校正后系统满足:  $K_v^* \geq 150\text{s}^{-1}$ ;  $\sigma^* \% \leq 40\%$ ;  $t_s^* \leq 1\text{s}$ 。

解 (1) 系统固有部分频率特性及校正后系统频率特性的 Bode 图如图 5-21 所示。

由  $\sigma = 0.16 + 0.4(M_r - 1) = 0.4$ , 得  $M_r = 1.6$ 。

$$k = 2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2 = 3.8$$

得  $\omega_c = \frac{k\pi}{t_s} = 11.9$ , 取  $\omega_c = 14\text{s}^{-1}$ 。

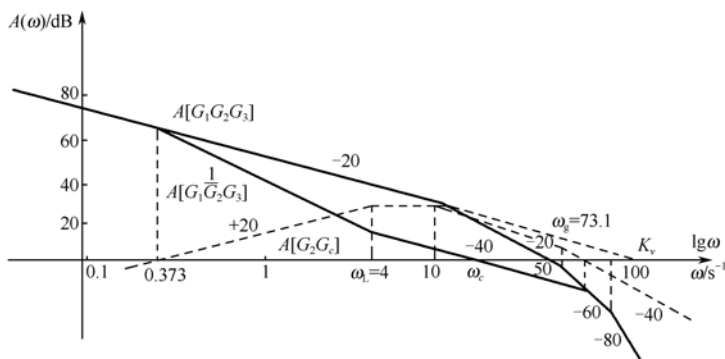


图 5-21 校正后系统频率特性的 Bode 图

$\omega_1 \leq \frac{M_r - 1}{M_r} \omega_c = 5.25$ , 取  $\omega_1 = 4 \text{ s}^{-1}$ ;  $\omega_r \geq \frac{M_r + 1}{M_r} \omega_c = 22.8$ , 经计算,  $\omega_r = 73.1 \text{ s}^{-1}$ 。

由  $40 \lg \frac{50}{38.7} + 60 \lg \frac{\omega_r}{50} = 20 \lg \frac{\omega_r}{14}$ , 得  $\omega_r = 73.1 \text{ s}^{-1}$ 。

(2) 求取  $G_2(s)G_c(s)$  的频率特性及校正环节  $G_c(s)$ 。

在校正频率范围内:

$$A[G_2(s)G_c(s)] = A[G_1(s)G_2(s)G_3(s)] - A\left[G_1(s)\frac{1}{G_c(s)}G_3(s)\right]$$

在校正频率范围外,  $A[G_2(s)G_c(s)]$  取两边延长线。

因此

$$G_c(s)G_2(s) = \frac{2.68s}{(0.25s+1)(0.1s+1)(0.02s+1)}$$

$$G_c(s) = \frac{G_c(s)G_2(s)}{G_2(s)} = \frac{0.223s}{0.25s+1}$$

校正后的性能指标  $K_v = 150 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega_c = 14 \text{ s}^{-1}$ ,  $\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 45.9^\circ$ ,  $M_r = 1.39$ ,  $k = 2.67$ ,  $\sigma = 0.316$ ,  $t_s = \frac{k\pi}{\omega_c} = 0.666 \text{ s}$ 。静态、动态满足性能要求。

$G_c(s)$  采用有源校正网络实现, 如图 5-22 所示。

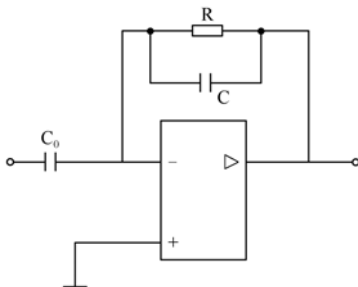


图 5-22 反馈校正环节的有源网络实现

$$G_c(s) = \frac{RC_0 s}{RCs + 1} \quad \text{令 } RC_0 = 0.223, \quad RC = 0.25。$$

## 5.4 习题解析

**题 5.1** 什么是系统校正？系统校正有哪些类型？

**【解析】**理解校正系统的定义，并按校正装置在系统中的连接方式分类校正系统。

**解** 所谓校正，是指在系统中增加新的环节，改善系统的静、动态性能的方法。

按照校正装置在系统中的连接方法不同，校正可以分为串联校正和并联校正。

如果校正装置串联在系统的固定部分的前向通道中，这种校正称为串联校正。串联校正主要可以分为：①相位超前校正；②相位滞后校正；③相位滞后-超前校正。如果校正装置与前向通道某些环节进行并联，称为并联校正。并联校正主要可以分为：①反馈校正；②顺馈校正。

**题 5.2** PI 调节器调整系统的什么参数？使系统在结构上发生怎样的变化？它对系统的性能有什么影响？如何减小它对系统稳定性的影响？

**【解析】**理解 PI 调节器调节系统中的参数，这些参数变化使系统的结构发生变化，从而引起系统性能的变化。

**解** 引入 PI 调节器后，系统的型次提高，使系统的稳态误差得以消除或减少，改善了系统的稳态性能。但由于校正后系统相位裕度有所下降，所以系统的稳定性变差。实际应用时，要注意将 PI 控制器转折频率放在固有系统转折频率左边，并且要远离一些，这样对系统的稳定性的影响较小。

**题 5.3** PD 控制为什么又称为超前校正？它对系统的性能有什么影响？图 5-23 为某单位负反馈系统校正前、后的开环对数幅频特性曲线，比较系统校正前后的性能变化。

**【解析】**理解 PD 调节器调节系统中的参数，这些参数变化使系统与系统超前校正有相同的效果。并通过分析图 5-23，分析校正前与校正后系统的相位裕度与幅值裕度之间的区别。

**解** PD 控制器提供了正的相位角，所以 PD 控制称为超前校正。采用 PD 校正后，可增强系统相位裕度，稳定性随之增强；剪切频率右移，系统快速性提高。所以，PD 控制提高了的动态性能，但是由于在高频段，增益上升，使系统抗干扰能力减弱。

图 5-23 所示为校正后系统校正后的系统开环 Bode 图。校正后，系统以 -20dB 的斜率穿越 0dB 线，此段频率为 0.1~1rad/s；系统的相位裕度约为 40°，幅值裕度约为 11dB，满足本题要求。剪切频率略小于 0.5rad/s，比校正前的约 2rad/s 小，说明闭环系统的带宽也随之减小。所以，这种校正会使系统的响应速度有所降低。

**题 5.4** 图 5-24 所示为某单位负反馈系统校正前后的开环对数幅频特性曲线，写出系统校正前后的开环传递函数  $G_1(s)$  和  $G_2(s)$ 。

**【解析】**利用 Bode 图上渐近线的转角频率和斜率关系，还原系统传递函数表达式。利用校正前和校正后曲线的形状和位置关系的变化，分析校正前与校正后系统的相位裕度与幅值裕度之间的区别。则校正前  $\gamma' = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.01\omega_c = 45^\circ$ 。

**解** 由图 5-24 (a) 可知校正前系统的传递函数为

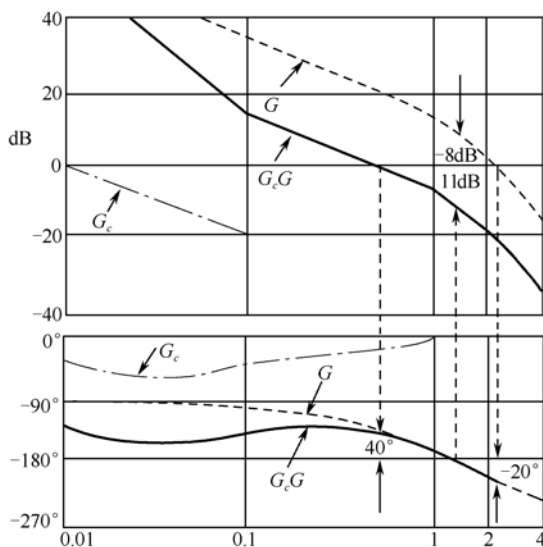
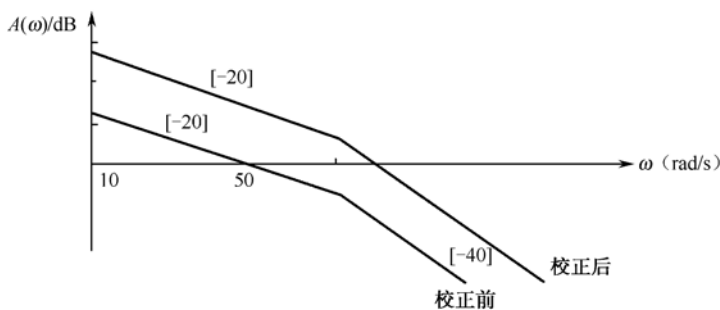
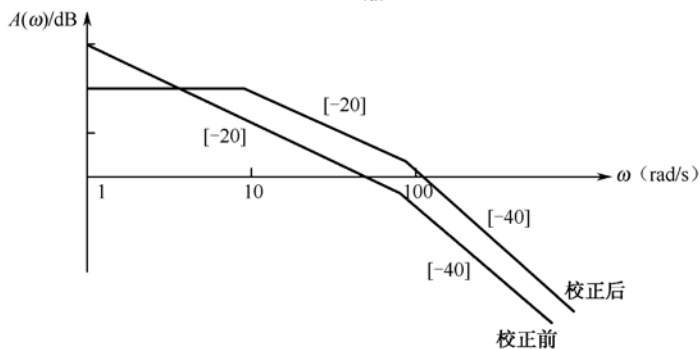


图 5-23 某单位负反馈系统校正前、后开环对数幅频特性曲线



(a)



(b)

图 5-24 单位负反馈系统校正前后的开环对数幅频特性曲线

$$G_1(s) = \frac{K}{s\left(\frac{s}{100} + 1\right)}$$

由于校正前  $\omega_c = 50$ ，即

$$\left| G_1(j\omega_c) \right| = \frac{K}{\omega_c \sqrt{\left( \frac{\omega_c}{100} \right)^2 + 1}} \bigg|_{\omega_c=50} = 1$$

解得  $K = 50$ ，则校正前系统的传递函数为

$$G_1(s) = \frac{50}{s\left(\frac{s}{100} + 1\right)}$$

校正前  $\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.01\omega_c = 63.4^\circ$ 。

由图 5-24 (a) 可知校正后系统的传递函数为

$$G_2(s) = \frac{K}{s\left(\frac{s}{110} + 1\right)}$$

由于校正后  $\omega_c = 100$ ，即

$$\left| G_2(j\omega_c) \right| = \frac{K}{\omega_c \sqrt{\left( \frac{\omega_c}{110} \right)^2 + 1}} \bigg|_{\omega_c=110} = 1$$

解得  $K = 135$ ，则校正后系统的传递函数为

$$G_2(s) = \frac{135}{s\left(\frac{s}{110} + 1\right)}$$

校正后  $\gamma' = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.01\omega_c = 45^\circ$ 。

由图 5-24 (b) 可知校正前系统的传递函数为

$$G_1(s) = \frac{K}{s\left(\frac{s}{100} + 1\right)}$$

由于校正前  $\omega_c = 80$ ，即

$$\left| G_1(j\omega_c) \right| = \frac{K}{\omega_c \sqrt{\left( \frac{\omega_c}{100} \right)^2 + 1}} \bigg|_{\omega_c=80} = 1$$

解得  $K = 102$ ，则校正前系统的传递函数为

$$G_1(s) = \frac{102}{s\left(\frac{s}{100} + 1\right)}$$

校正前  $\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.01\omega_c = 51.3^\circ$ 。

由图 5-24 (b) 可知校正后系统的传递函数为

$$G_2(s) = \frac{K}{(s+1)\left(\frac{s}{80}+1\right)}$$

由于校正后  $\omega_c = 100$ ，即

$$\left| G_2(j\omega_c) \right| = \frac{K}{\sqrt{\omega_c^2 + 1} \sqrt{\left( \frac{\omega_c}{800} \right)^2 + 1}} \bigg|_{\omega_c=100} = 1$$

解得  $K = 135$ ，则校正后系统的传递函数为

$$G_2(s) = \frac{135}{s\left(\frac{s}{110}+1\right)}$$

**题 5.5** 试分别叙述利用比例负反馈和微分负反馈包围振荡环节起何作用？

**【解析】** 理解比例负反馈和微分负反馈对振荡环节的影响。

**解** 比例负反馈在动态或稳态过程中起反馈校正作用。微分负反馈在动态过程中起反馈校正作用；而在稳态时，反馈正支路如同短路，不起作用。

**题 5.6** 若对图 5-25 所示的系统中的一个惯性环节采用微分负反馈校正（软反馈），试分析它对系统性能的影响。

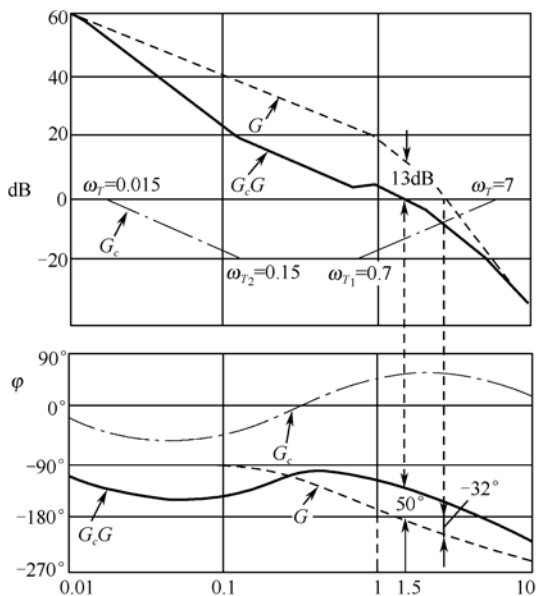


图 5-25 题 5.6 图

【解析】理解大惯性环节的时间常数对相角裕度的影响。

解 该系统由三个环节组成，分别为两个惯性环节和一个积分环节。根据系统未校正前的 Bode 图中可以看出系统的相角裕度为  $-32^\circ$  系统不稳定。在两个惯性环节中，惯性大的环节应该在之后，然后对这个大惯性环节施加微分负反馈。从而保证系统校正后仍为惯性环节，但是增大了大惯性系统的时间常数，从而使系统校正后的相角裕度为  $50^\circ$ ，系统稳定。

题 5.7 设图 5-26 中  $K_1=0.2$ ,  $K_2=1000$ ,  $K_3=0.4$ ,  $T=0.8\text{s}$ ,  $\beta=0.01$ 。试求：(1) 未设反馈校正时系统的动、静态性能；(2) 增设反馈校正时，系统的动、静态性能。

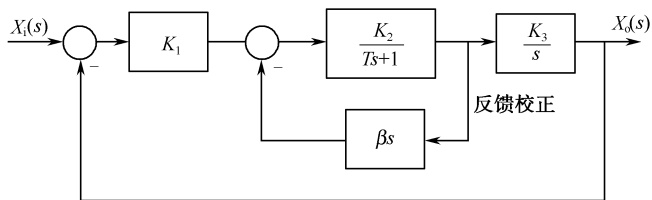


图 5-26 系统结构框图

【解析】通过系统结构框图得到未校正系统的传递函数和增设反馈校正后的传递函数，求得系统的动、静态性能。

解 (1) 令  $G_1(s)=K_1, K_1=0.2$ ;  $G_2(s)=\frac{K_2}{Ts+1}, K_2=1000, T=0.8$ 。

$$G_3(s)=\frac{K_3}{s}, K_3=0.4$$

则带校正系统的开环传递函数为

$$G(s)=G_1(s)G_2(s)G_3(s)=\frac{80}{s(0.8s+1)}$$

$$\text{令 } |G(j\omega_c)|=1$$

$$|G(j\omega_c)|=\frac{80}{\omega_c\sqrt{(0.8\omega_c)^2+1}}=1$$

解得  $\omega_c=9.96$ ，则

$$\gamma=180^\circ-90^\circ-\arctan 0.8\omega_c=7.16$$

令  $\varphi(\omega_g)=-180^\circ$ ，即

$$\varphi(\omega_g)=-90^\circ-\arctan 0.8\omega_g=-180^\circ$$

解得  $\omega_g=\infty$ 。

$$K_g=-20\lg\frac{80}{\omega_g\sqrt{(0.8\omega_g)^2+1}}=\infty$$

所以系统不稳定。

(2) 校正后等效开环传递函数为

$$G(s) = G_1(s) \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)H(s)} G_3(s) = K_1 \cdot \frac{\frac{K_2}{Ts+1}}{1 + \frac{K_2\beta s}{Ts+1}} \cdot \frac{K_3}{s} = \frac{80}{s(10.8s+1)}$$

$$\text{令 } |G(j\omega_c)| = 1$$

$$|G(j\omega_c)| = \frac{80}{\omega_c \sqrt{(10.8\omega_c)^2 + 1}} = 1$$

解得  $\omega_c = 2.72$ ，则

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 10.8\omega_c = 1.94$$

令  $\varphi(\omega_g) = -180^\circ$ ，即

$$\varphi(\omega_g) = -90^\circ - \arctan 10.8\omega_g = -180^\circ$$

解得  $\omega_g = \infty$ 。

$$K_g = -20 \lg \frac{80}{\omega_g \sqrt{(10.8\omega_g)^2 + 1}} = \infty$$

**题 5.8** 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

试设计一串联超前校正装置，使系统满足如下指标：(1) 在单位斜坡输入下的稳态误差  $e_{ss} < 1/15$ ；(2) 截止频率  $\omega_c \geq 7.5 \text{ rad/s}$ ；(3) 相角裕度  $\gamma \geq 45^\circ$ 。

**【解析】**通过给定单位斜坡下的稳态误差求得  $K$ ，分析未校正系统是否满足设计要求，并根据设计要求设计校正装置，再判断校正后是否满足设计要求。

**解** 已知单位输入的稳态误差  $e_{ss} < 1/15$ 。

$$K = \frac{1}{e_{ss}} > 15$$

取  $K = 15$ ，则未校正系统的 Bode 图如图 5-27 所示，可以计算出剪切频率  $\omega'_c$ 。由于对数频率曲线自  $\omega = 1$  开始以  $-40 \text{ dB/dec}$  的斜率与零分贝线交点于  $\omega'_c$ ，故存在下述关系：

$$\frac{20 \lg 15}{\lg \frac{\omega'_c}{\omega}} = 40$$

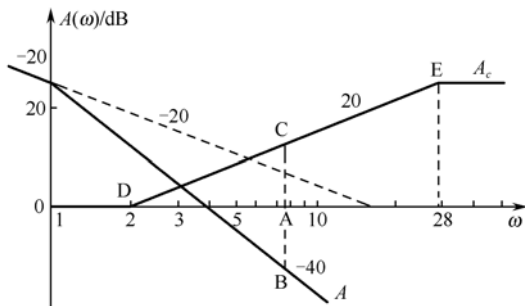


图 5-27 未校正系统的 Bode 图



由于  $\omega = 1\text{rad/s}$ ，则

$$\omega_c = 3.87\text{rad/s} < 7.5\text{rad/s}$$

于是未校正系统的相位裕度为

$$\gamma' = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \omega_c' = 15^\circ < 45^\circ$$

因为要把相位裕度从  $14^\circ$  调高到  $45^\circ$ ，所以采用相位超前校正，选  $\omega_c = 7.5\text{rad/s}$ ，由

$$20\lg \frac{15}{\omega_c^2} = -10\lg \alpha, \text{ 得 } \alpha = 13.8。$$

$$\text{那么 } T = \frac{1}{\omega_c \sqrt{\alpha}} = 0.035。$$

于是，滞后校正网络的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{\alpha Ts + 1}{Ts + 1} = \frac{0.48s + 1}{0.035s + 1}$$

校正后系统的开环传递函数为

$$G(s)G_c(s) = \frac{15(0.48s + 1)}{s(0.035s + 1)(s + 1)}$$

校正后系统的相位裕度为

$$\gamma' = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \omega_c - \arctan 0.035\omega_c + \arctan 0.48\omega_c = 67.3 > 45^\circ$$

满足设计要求。

**题 5.9** 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.25s+1)}$$

要求校正后系统的静态速度误差系数  $K_v \geq 5\text{rad/s}$ ，相角裕度  $\gamma \geq 45^\circ$ ，试设计串联滞后校正装置。

**【解析】**通过系统的静态误差求得  $K$ ，分析未校正系统是否满足设计要求，并根据设计要求设计校正装置，以满足设计要求。

**解** (1) 分析原系统。将  $K_v = 5\text{rad/s}$  带入未校正系统的开环传递函数汇总并绘制 Bode 图如图 5-28 所示。由于  $\omega = 1$  处，系统的开环增益为  $20\lg 5\text{dB}$ ，而穿过剪切频率的系统幅频特性曲线的斜率为  $-40\text{dB/dec}$ ，所以

$$\frac{20\lg 15}{\lg \frac{\omega_c}{\omega}} = 40, \quad \omega_c = 2.24\text{rad/s}$$

求得相位裕度  $\gamma' = -5.1^\circ$ 。可见系统是不稳定的。

(2) 设计校正环节。计算未校正系统相频特性对应于相位裕度为  $\gamma'' = \gamma + \varepsilon = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$  时的频率  $\omega_c$ ，其中  $\varepsilon$  为估计值。由于：

$$\gamma'' = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \omega_c - \arctan 0.25\omega_c = 60^\circ$$

$$\arctan \omega_c + \arctan 0.25\omega_c = 30^\circ$$

$$\arctan \frac{(1+0.25)\omega_c}{1-0.25\omega_c^2} = 30^\circ$$

$$\omega_c = 0.44\text{rad/s}$$

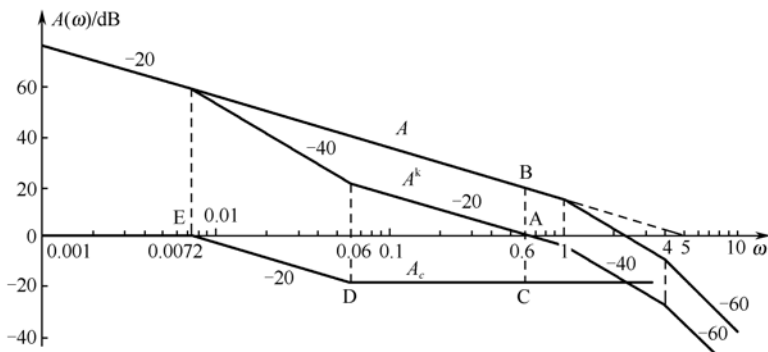


图 5-28 未校正系统的 Bode 图

当  $\omega_c = \omega = 0.44 \text{ rad/s}$  时, 令未校正系统的开环增益为  $20 \lg \beta (\text{dB})$ , 从而求出串联滞后校正装置系数  $\beta$ 。由于未校正的增益在  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  时为  $20 \lg 5 (\text{dB})$ , 故有:

$$\frac{20 \lg \beta - 20 \lg 5}{\lg(1/0.44)} = 20$$

解得  $\beta = 11$ , 和  $\omega_2 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_c}{4} = 0.1 \text{ rad/s}$ , 则  $\omega_1 = \frac{1}{\beta T} = 0.01 \text{ rad/s}$ 。

于是, 滞后校正网络的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{1}{11} \left( \frac{s + 0.11}{s + 0.011} \right) = \frac{9.1s + 1}{10.01s + 1}$$

校正后系统的开环传递函数为

$$G(s)G_c(s) = \frac{5(9.1s + 1)}{s(10.01s + 1)(s + 1)(0.25s + 1)}$$

校正后系统的相位裕度为

$$\gamma'' = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 10.01\omega_c - \arctan \omega_c - \arctan 0.25\omega_c + \arctan 9.1\omega_c = 58.8^\circ$$

满足设计要求。

**题 5.10** 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{40}{s(0.2s + 1)(0.0625s + 1)}$$

(1) 若要求校正后系统的相角裕度为  $30^\circ$ , 幅值裕度为  $10 \sim 12 (\text{dB})$ , 试设计串联超前校正装置; (2) 若要求校正后系统的相角裕度为  $50^\circ$ , 幅值裕度为  $30 \sim 40 (\text{dB})$ , 试设计串联滞后校正装置。

**【解析】** 分析未校正系统是否满足设计要求, 并根据设计要求设计校正装置, 再判断校正后是否满足设计要求。

解 
$$G(s) = \frac{40}{s(0.2s + 1)(0.0625s + 1)} = \frac{40}{s(\frac{s}{5} + 1)(\frac{s}{16} + 1)}$$

(1) 依题作图。未校正系统的对数幅频特性曲线如图 5-29 所示。

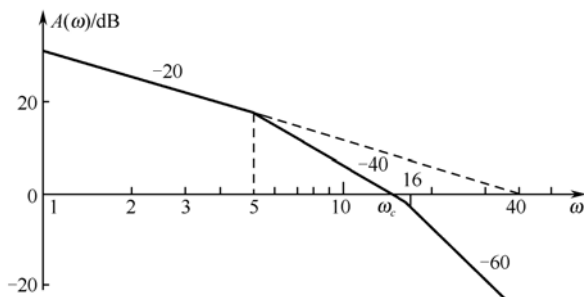


图 5-29 未校正系统的对数幅频特性曲线

校正前  $\omega_c = \sqrt{5 \times 40} = 14.14$

$$\gamma = 90^\circ - \arctg \frac{\omega_c}{5} - \arctg \frac{\omega_c}{16} = -22^\circ \quad (\text{系统不稳定})$$

$$\varphi_m = \gamma'' - \gamma + 10^\circ = 30^\circ - (-22^\circ) + 10^\circ = 62^\circ$$

超前校正后截止频率  $\omega_c''$  大于原系统  $\omega_c = 14.14$ ，而原系统在  $\omega = 16$  之后相角下降很快，用一级超前网络无法满足要求。

(2) 设计滞后校正装置。校正前后的系统 Bode 图如图 5.30 所示。

$$\gamma = \gamma'' + 5^\circ = 55^\circ$$

经试算，在  $\omega = 2.4$  处有  $\gamma(2.4) = 55.83^\circ$ ，取  $\omega_c'' = 2.4$ 。

$$\text{对应 } |G(\omega_c'')| = 20 \left( \lg \frac{40}{2.4} \right) = 24.436。$$

在  $\omega_c'' = 2.4$  以下 24.436 dB 画水平线，左延 10dec 到对应  $\omega = 0.24$  处，作 -20 dB/dec 线交 0 dB 线到 E， $\omega_E = \frac{0.24}{16} = 0.015$ ，因此可得出滞后校正装置传递函数：

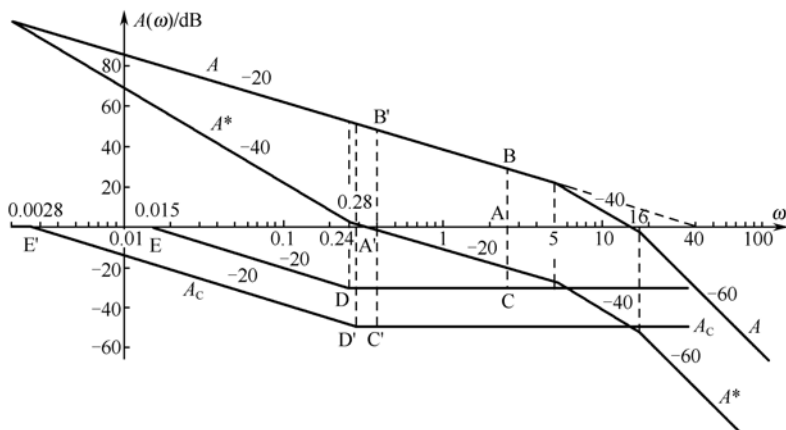


图 5-30 校正前后的系统 Bode 图

$$G_c(s) = \frac{\frac{s}{0.24} + 1}{\frac{s}{0.015} + 1}$$

$$G_c(s) \cdot G(s) = \frac{40 \left( \frac{s}{0.24} + 1 \right)}{s \left( \frac{s}{5} + 1 \right) \left( \frac{s}{16} + 1 \right) \left( \frac{s}{0.015} + 1 \right)}$$

$$\begin{aligned} \gamma'' &= 90^\circ + \arctan \frac{2.4}{0.24} - \arctan \frac{2.4}{5} - \arctan \frac{2.4}{16} - \arctan \frac{2.4}{0.015} \\ &= 90^\circ + 84.29^\circ - 25.64^\circ - 8.53^\circ - 89.642^\circ = 50.48^\circ \approx 50^\circ \end{aligned}$$

试算  $\omega_g'' = 8.6$ ，由 Bode 图可得：

$$h = 20 \lg |G_c(\omega_g'') G(\omega_g'')| = -20 \lg \frac{40 \times 35.8}{8.6 \times 1.99 \times 1.29 \times 573.33} = 18.9 \text{ dB} < 30 \text{ dB}$$

幅值裕度  $h$  不满足要求。为增加  $h$ ，应将高频段压低。重新设计：使滞后环节高频段幅值衰减 40dB ( $\omega_g \approx 8.9$ )。求对应  $20 \lg(G(\omega_c'')) = 40 \text{ dB}$  处的  $\omega_c''$ 。

$$\frac{A(\omega_c'')}{\lg 40 - \lg \omega_c''} = \frac{40}{\lg \frac{40}{\omega_c''}} = 20$$

$$\frac{40}{\omega_c''} = 10^2 = 100, \quad \omega_c'' = 0.4$$

$$\gamma(0.4) = 90^\circ - \arctan \frac{0.4}{5} - \arctan \frac{0.4}{16} = 84^\circ$$

查惯性环节表，在  $0.7\omega_c''' = 0.28$  处： $\varphi \approx -34^\circ$ 。

$$84^\circ - 34^\circ = 50^\circ$$

以  $-20 \text{ dB/dec}$  交  $0 \text{ dB}$  线于 E ( $\omega_E = 0.0028$ )，得出滞后校正装置传递函数：

$$G_c(s) = \frac{\frac{s}{0.28} + 1}{\frac{s}{0.0028} + 1}$$

$$\text{在 } \omega_c'' = 0.4 \text{ 处: } \begin{cases} \gamma_c = \arctan \frac{0.4}{0.28} - \arctan \frac{0.4}{0.0028} = -34.59^\circ \\ A_c = 20 \lg |G_c| = 20 \lg \frac{1.744}{142.86} = -38.27 \text{ dB} \end{cases}$$

$$G_c(s)G(s) = \frac{40 \left( \frac{s}{0.28} + 1 \right)}{s \left( \frac{s}{5} + 1 \right) \left( \frac{s}{16} + 1 \right) \left( \frac{s}{0.0028} + 1 \right)}$$

验算,  $\omega_g''' = 8.6$ 。

$$h = -20 \lg(G_c G(\omega_g'' n)) = -20 \left( \frac{40 \times 30.73}{8.6 \times 1.99 \times 1.1353 \times 3071.5} \right) = 33.7 \text{ dB}$$

$$\gamma = 180^\circ - \angle G_c G(0.4)$$

$$= 180^\circ - 90^\circ + \arctan \frac{0.4}{0.28} - \arctan \frac{0.4}{5} - \arctan \frac{0.4}{16} - \arctan \frac{0.4}{0.0028}$$

$$= 90^\circ + 55^\circ - 4.57^\circ - 1.432^\circ - 89.6^\circ \approx 50^\circ \quad (\text{满足要求})$$

$$\text{因此确定 } G_c(s) = \frac{\frac{s}{0.28} + 1}{\frac{s}{0.0028} + 1} = \frac{3.57s + 1}{357s + 1}。$$

题 5.11 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.25s+1)}$$

要求校正后系统的静态速度误差系数  $K_v \geq 5 \text{ rad/s}$ , 截止频率  $\omega_c \geq 2 \text{ rad/s}$ , 相角裕度  $\gamma \geq 45^\circ$ , 试设计串联校正装置。

【解析】根据题目要求确定  $K$  值, 分析未校正系统是否满足设计要求, 并根据设计要求设计校正装置, 再判断校正后是否满足设计要求。

解 系统开环传递函数及校正装置的 Bode 图如图 5-31 所示。在  $\omega = 2$  以后, 系统相角下降很快, 难以用超前校正补偿; 滞后校正也不能奏效, 故采用迟后-超前校正方式。根据题目要求, 取  $\omega_c' = 2$ ,  $K = K_v = 5$ 。

原系统相角裕度为

$$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c') = 180^\circ - \arctan 2 - \arctan \frac{2}{4} - 90^\circ = 0^\circ$$

最大超前角  $\varphi_m = \gamma'' - \gamma + 5^\circ = 45^\circ - 0^\circ + 5^\circ = 50^\circ$ 。

得  $a \approx 8$ ,  $10 \lg a \approx 9 \text{ dB}$ 。

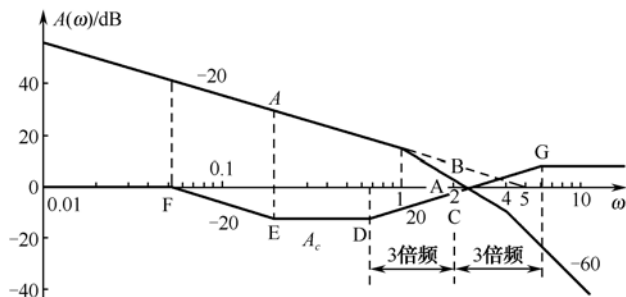


图 5-31 系统开环传递函数及校正装置 Bode 图

过  $\omega_c' = 2$  作  $\overline{BC}$ , 使  $\overline{BA} = \overline{AC}$ ; 过  $C$  作  $20 \text{ dB/dec}$  线并且左右延伸各 3 倍频程, 定出  $D$ 、 $G$ , 进而确定  $E$ 、 $F$  点。各点对应的频率为

$$\omega^* = \frac{\omega_c^2}{2} = \frac{\sqrt{5}^2}{2} = 2.5$$

$$\omega_E = 0.1\omega'_c = 0.1 \times 2 = 0.2$$

$$\omega_F = \omega_E \frac{\omega_D}{\omega^*} = 0.2 \times \frac{0.67}{2.5} = 0.0536$$

$$\omega_G = \omega'_c \times 3 = 6$$

有

$$G_c(s) = \frac{\left(\frac{s}{0.2} + 1\right)\left(\frac{s}{0.67} + 1\right)}{\left(\frac{s}{0.0536} + 1\right)\left(\frac{s}{6} + 1\right)}$$

$$G_c(s)G(s) = \frac{5\left(\frac{s}{0.2} + 1\right)\left(\frac{s}{0.67} + 1\right)}{s(s+1)\left(\frac{s}{4} + 1\right)\left(\frac{s}{0.0536} + 1\right)\left(\frac{s}{6} + 1\right)}$$

验算  $\gamma = 180^\circ + G_c(j\omega'_c)G(j\omega'_c)$

$$= \arctan \frac{2}{0.2} + \arctan \frac{2}{0.67} - \arctan \frac{2}{0.0536} - \arctan \frac{2}{6} = 48.87^\circ > 45^\circ$$

题 5.12 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)(s+9)}$$

(1) 如果要求系统在单位阶跃输入作用下的超调量  $\sigma\% = 205$ , 试确定  $K$  值; (2) 根据所求得的  $K$  值, 求出系统在单位阶跃输入作用下的调节时间  $t_s$ , 以及静态速度误差系数  $K_v$ 。

【解析】通过系统的超调量, 求得系统的谐振频率, 从而求得系统的相角裕度、系统的剪切频率、 $K$  值和  $t_s$ 。

解 (1)

$$\sigma = 0.16 + 0.4(M_r - 1)$$

$$M_r = \frac{\sigma - 0.16}{0.4} + 1 = \frac{0.2 - 0.16}{0.4} + 1 = 1.1 \quad (1)$$

$$M_r = \frac{1}{\sin \gamma}$$

$$\gamma = \arcsin \frac{1}{M_r} = 65.4^\circ \quad (2)$$

$$\text{又} \quad \gamma = 180^\circ - \angle G(j\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{\omega}{3} - \arctan \frac{\omega}{9} \quad (3)$$

式 (2)、式 (3) 联立得:

$$\arctan \frac{\omega_c}{5} + \arctan \frac{\omega_c}{9} = 90^\circ - 65.4^\circ = 24.6^\circ$$

$$\operatorname{tg} 24.6^\circ \cdot [27 - \omega_c^2] = 12\omega_c$$

$$\omega_c^2 + 26.21\omega_c - 27 = 0$$

解出  $\omega_c = 1$  ( $\omega_c = 2.72$  舍去), 开环增益  $K_0 = \frac{K}{3 \times 9} = \omega_c = 1$ ,  $K = 27$ 。

$$(2) \quad t_s = \frac{[2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2] \pi}{\omega_c} = 6.76$$

依题有  $K_v = K_0 = 1$ 。

**题 5.13** 系统的开环对数幅频特性如图 5-32 所示, 其中虚线表示校正前, 实线表示校正后。要求: (1) 确定所用的是何种串联校正方式, 写出校正装置的传递函数  $G_c(s)$ ; (2) 确定使校正后系统稳定的开环增益范围; (3) 当开环增益  $K=1$  时, 求校正后系统的相角裕度  $\gamma$  和幅值裕度  $h$ 。

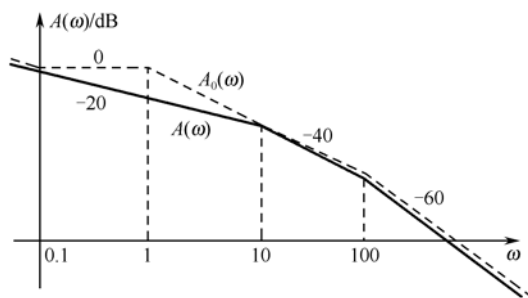


图 5-32 系统的开环对数幅频特性

**【解析】** 通过系统的幅频特性曲线求得系统校正装置传递函数; 通过劳斯判据确定系统的开环增益的范围; 通过给定的开环增益求得系统的相角裕度和幅值裕度。

**解** (1) 由系统校正前后开环对数幅频特性曲线可得校正装置的对数幅频特性曲线如图 5-33 所示, 从而可得:

$$G_c(s) = \frac{(s+1)^2}{(10s+1)(0.1s+1)}$$

所用的是串联迟后-超前校正方式。

(2) 由图 5-32 中实线可写出校正后系统的开环传递函数:

$$G(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)(0.01s+1)}$$

校正后系统闭环特征方程为

$$D(s) = s^3 + 110s^2 + 1000s + 1000K = 0$$

列劳斯矩阵

$s^3$	1	1000
$s^2$	110	1000K
$s^1$	$(11000 - 1000K)/110$	
$s^0$	1000K	

根据劳斯判据  $(11000 - 1000K)/110 > 0, 1000K > 0$

所以有  $0 < K < 110$ 。

(3) 当  $K=1$  时, 由图 5-32 可看出:

$$\begin{cases} \omega_c = 1 \\ \omega_g = \sqrt{10 \times 100} = 31.6 \end{cases}$$

所以有:

$$\begin{cases} \gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 83.72^\circ \\ h = 1/|G(j\omega_g)| = 109.8 \end{cases}$$

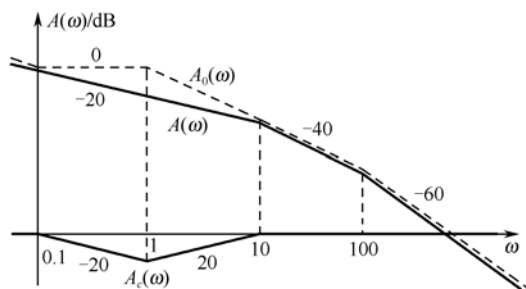


图 5-33 校正装置的对数幅频特性曲线



# 第6章 离散控制系统

## 6.1 基本要求及重难点

### 基本要求

- 掌握离散控制系统的基本概念;
- 了解采样控制与数字控制系统;
- 熟悉信号采样与采样定理,以及Z变换与Z反变换的基本方法;
- 了解 $s$ 平面、 $z$ 平面和 $w$ 平面的映射关系;
- 熟练掌握离散控制系统的数学模型-差分方程以及离散控制系统的传递函数;
- 掌握离散控制系统的稳定性分析、动态性能分析和稳态性能分析。

### 教学重点

- 离散控制系统的传递函数;
- 离散控制系统的稳定性、动态性能和稳态性能分析。

### 教学难点

- $s$ 平面、 $z$ 平面和 $w$ 平面的映射关系。

## 6.2 本章学习指导

### 6.2.1 离散控制系统概述

连续控制系统中各变量都是时间的连续函数,如果系统中有一处或几处信号是离散的脉冲序列或数码序列,就称为离散时间控制系统。离散系统与连续系统相比,既有本质上的不同,又有分析研究方面的相似性。

当离散控制系统中的离散信号是脉冲序列形式时,称为采样控制系统或脉冲控制系统;当离散系统中的离散信号是数码序列形式时,称为数字控制系统或计算机控制系统。数字控制系统近似于采样控制系统,统称为离散系统。

数字控制和连续控制一样,也都是闭环反馈控制系统。其主要区别在于:计算机的输入和输出都是二进制编码的数字信号,在时间和幅值上都是离散的;而系统中的被控对象和测量元件的输入和输出都是连续信号。所以计算机控制系统在每个采样周期内,要完成对连续信号的

采样(A/D转换)和将数字信号转换成模拟信号(D/A)的过程。

A/D转换器和D/A转换器是计算机控制系统中的两个特殊环节。A/D转换器是将连续的模拟信号转换为离散数字信号的装置。A/D转换包括两个过程:先采样,每隔 $T$ 秒对连续信号 $e(t)$ 进行一次采样,得到采样后的离散模拟信号 $e^*(t)$ ;其次是整量化,幅值上连续的离散信号 $e^*(t)$ 必须经过编码表示成最小二进制的整数倍,成为离散数字信号 $\overline{e^*(t)}$ ,才能进行运算。

D/A转换器是把离散的数字信号转换为连续模拟信号的装置。D/A转换也有两个过程:一是解码过程,把离散数字信号 $\overline{e^*(t)}$ 转换为离散的模拟信号 $e^*(t)$ ;二是复现过程,经过保持器将离散模拟信号复现为连续模拟信号 $e_h(t)$ 。 $e_h(t)$ 是一个阶梯信号,当采样频率足够高时, $e_h(t)$ 就趋近于连续信号。

离散控制系统与相应的连续系统具有以下优点:

- (1) 离散系统允许采用高灵敏度的检测传感元件来提高系统的灵敏度,如光栅、码盘、磁栅等。
- (2) 当数字控制器和转换器的位数足够高时,能够保证足够的计算精度。
- (3) 数字信号的传递可以有效地抑制噪声,从而提高系统的抗扰能力。
- (4) 可用一台计算机或控制器分时控制若干个系统,提高设备的利用率。
- (5) 由数字计算机构成的数字控制器,控制律由软件实现。因此,与连续式控制装置相比,控制规律修改调整方便,控制灵活。
- (6) 数字计算机的运算速度极快(而且在不断提高)、内存容量大,可实现系统的实时控制。
- (7) 数字信号易于实现保密,信息安全性好。

由于离散系统的上述优点,离散控制系统在自动控制领域中得到了广泛的应用。

离散控制系统也是一种动态系统,因而和连续控制系统一样,其性能由稳态和动态两个部分组成。由于离散系统中存在脉冲信号或数字信号,如果仍沿用连续系统中以拉普拉斯变换的方法来建立各环节的传递函数,则会在运算中出现复变量 $s$ 的超越函数。因此,在离散系统中,用差分方程来描述线性离散系统,用 $Z$ 变换的方法来分析线性离散系统。通过 $Z$ 变换,可以把连续系统中的传递函数、频率特性、时间响应等概念用于线性离散系统。

## 6.2.2 离散控制系统的数学模型

线性连续控制系统的数学模型是线性微分方程;而对于线性离散系统,其数学模型为差分方程。对于一个离散控制系统的差分方程,首先利用 $Z$ 变换,将差分方程变换为以 $z$ 为自变量, $X(z)$ 为因变量的代数方程,解出 $X(z)$ 后再进行 $Z$ 逆变换,即可得到 $x^*(t)$ 的值。

### 1. 线性常系数差分方程

常系数差分方程的一般形式如下:

$$\begin{aligned} & b_0 x_o(n) + b_1 x_o(n-1) + b_2 x_o(n-2) + \cdots + b_k x_o(n-k) \\ & = a_0 x_i(n) + a_1 x_i(n-1) + a_2 x_o(n-2) + \cdots + a_l x_i(n-l) \end{aligned} \quad (6-1)$$

式中,  $k \geq l$ ,  $k$ 为差分方程的阶数;  $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_l$ ,  $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_k$ 为常数;  $x_i(n)$ 和 $x_o(n)$ 分别表示系统输入和输出的脉冲序列。如果输入信号在 $n=0$ 时刻加入,那么 $x_o(-1)$ ,  $x_o(-2)$ ,  $\cdots$ ,

$x_o(-k)$  就表示系统的初始条件。

离散系统在任意采样时刻的输出值  $x_o(n)$ ，不仅和这一时刻的输入值有关  $x_i(n)$ ，而且与过去时刻的输入值  $x_i(n-1)$ ， $x_i(n-2)$ ……及输出值  $x_o(n-2)$ ， $x_o(n-2)$ ……有关。

## 2. 差分方程的解法

线性离散系统用 Z 变换使求解差分方程变的简便。求解步骤如下：

- (1) 用 Z 变换的延迟或超前定理，将时域差分方程化为  $z$  域的代数方程，引入初始条件；
- (2) 求  $z$  域代数方程的解；
- (3) 将  $z$  域代数方程的解通过 Z 反变换求得差分方程的解。

## 3. 脉冲传递函数的建立

离散系统的差分方程经 Z 变换得到  $z$  传递函数（又称脉冲传递函数）。

对于线性离散系统，零初始条件下系统离散输出信号的 Z 变换  $X_o(z)$  与离散输入信号的 Z 变换  $X_i(z)$  之比，定义为脉冲传递函数，用  $G(z)$  表示：

$$G(z) = \frac{X_o(z)}{X_i(z)} \quad (6-2)$$

脉冲传递函数的引入为对于线性离散系统的分析带来了极大的方便。在已知传递函数及典型输入的情况下，就可以求出线性离散系统的时间响应。

建立离散系统的脉冲传递函数通常有两种方法：

- (1) 已知系统连续部分的传递函数  $G(s)$ ， $G(s)$  进行 Z 变换，得到脉冲传递函数；或者将  $G(s)$  进行拉普拉斯反变换得到  $g(t)$ ，再令  $t = nT$ ，得  $\sum_{n=0}^{\infty} g(nT)z^{-n}$ ，即脉冲传递函数。
- (2) 已知系统的差分方程，则对差分方程进行 Z 变换，得到脉冲传递函数。

## 4. 串联环节的脉冲传递函数

离散系统中根据串联环节彼此间有无采样开关分为两种情况。图 6-1 (a) 所示两个串联环节之间没有采样开关。其脉冲传递函数为

$$G(z) = Z[G(s)] = Z[G_1(s)G_2(s)] = G_1G_2(z) \quad (6-3)$$

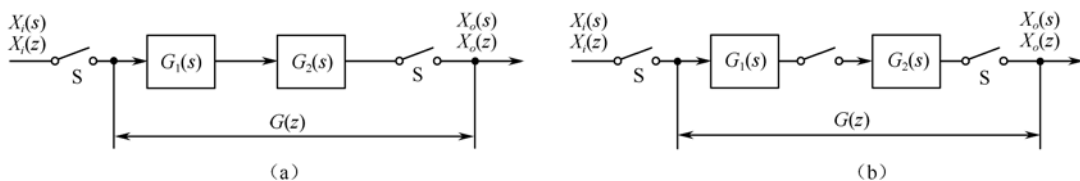


图 6-1 两种串联结构

图 6-1 (b) 所示两个串联环节之间有采样开关，因为脉冲传递函数是从采样点到采样点之间来计算的，串联后总的脉冲传递函数为两个单独的脉冲传递函数之乘积：

$$G(z) = G_1(z)G_2(z) \quad (6-4)$$

## 5. 并联环节的脉冲传递函数

并联环节其总的脉冲传递函数等于各并联环节的脉冲传递函数之和。图 6-2 所示两种结构形式的脉冲传递函数均为

$$G(z) = Z[G_1(s)] + Z[G_2(s)] = G_1(z) + G_2(z) \quad (6-5)$$

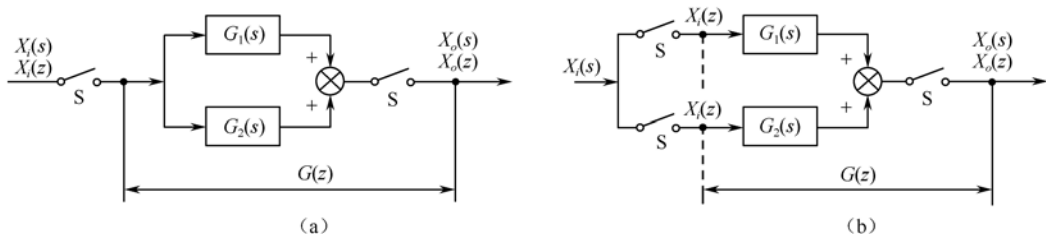


图 6-2 两种并联结构

## 6. 闭环系统的脉冲传递函数

闭环离散系统中采样开关的不同设置会影响其脉冲传递函数。对于图 6-3 (a) 所示的结构形式，有：

$$\Phi(z) = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} \quad (6-6)$$

式中， $GH(z) = Z[G(s)H(s)]$ 。

对于图 6-3 (b) 所示的结构形式，有：

$$\Phi(z) = \frac{G_1(z)G_2(z)}{1 + G_1(z)G_2H(z)} \quad (6-7)$$

式中， $G_2H(z) = Z[G_2(s)H(s)]$ 。

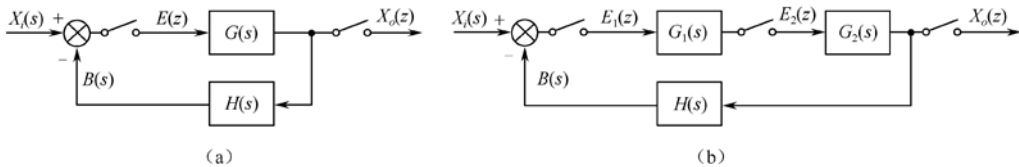


图 6-3 两种闭环结构

### 6.2.3 离散控制系统分析

把研究线性连续系统稳定性的方法从  $s$  平面转换到  $z$  平面上以后，稳定判据基本上也适用于线性离散系统。

#### 1. 线性离散系统稳定充要条件

典型线性离散控制系统的特征方程如下：

$$1 + GH(z) = 0$$

记系统的特征根或闭环脉冲传递函数的极点为  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ ，根据  $s$  平面与  $z$  平面的映射

关系可得到线性离散系统稳定的充要条件是：线性离散系统的全部特征根  $z_i (i=1,2,\dots,n)$  均分布在  $z$  平面的单位圆内，或全部特征根的模小于 1，即  $|z_i| < 1 (i=1,2,\dots,n)$ 。

系统的特征根中，只要有一个位于单位圆之外，系统就是不稳定的；如果有特征根位于单位圆周上，则系统临界稳定。

## 2. 线性离散系统的劳斯（Routh）稳定判据

在  $z$  平面内稳定性取决于根是否全在单位圆内，连续系统中的劳斯判据不能直接引用。需要寻找新的变换，使  $z$  平面的单位圆内映射到一个新的平面—— $w$  平面的虚轴之左，在此平面上，就可直接应用劳斯稳定判据。

双线性变换：

$$z = \frac{w+1}{w-1} \quad \text{反之} \quad w = \frac{z+1}{z-1} \quad (6-8)$$

式中， $z$ 、 $w$  均为复变量，写做  $\begin{cases} z = x + jy \\ w = u + jv \end{cases}$

若极点在  $z$  平面的单位圆内，则有  $x^2 + y^2 < 1$ ，对应于  $w$  平面中的  $u < 0$ ，即虚轴以左；若  $x^2 + y^2 > 1$ ，则为  $z$  平面的单位圆外，对应于  $w$  平面中的  $u > 0$ ，就是虚轴以右，如图 6-4 所示。

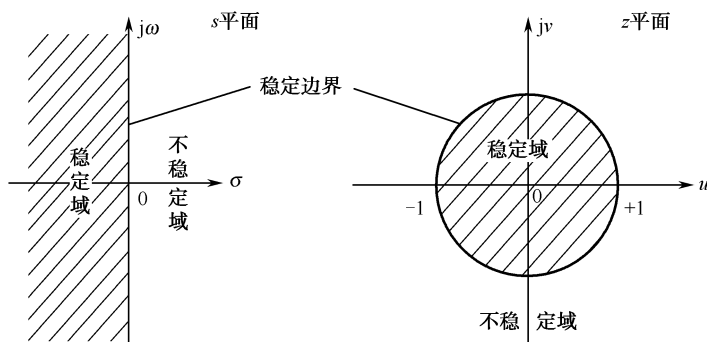


图 6-4  $z$  平面和  $w$  平面之间的映射关系

经过  $z$ - $w$  变换后，对原离散系统的稳定性问题变成判别  $w$  传递函数的特征根是否在左半平面，因而可用劳斯判据加以判别。

## 3. 离散控制系统动态性能

典型线性离散控制系统的闭环脉冲传递函数  $\Phi(z)$  可以表示为两个多项式之比的形式：

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{X_o(z)}{X_i(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} \\ &= K \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n)} = K \frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{j=1}^n (z - p_j)} = K \frac{P(z)}{D(z)} \end{aligned} \quad (6-9)$$

式中,  $z_i (i=1, 2, \dots, m)$  为系统的闭环零点;  $p_j (j=1, 2, \dots, n)$  为系统的闭环极点;  $z_i$  和  $p_j$  可以是实数或复数;  $K$  为系统稳态增益。

假定  $\Phi(z)$  无重复极点, 系统在单位阶跃输入信号作用下, 输出的 Z 变换并进行部分分式展开

$$X_o(z) = \frac{A_0 z}{z-1} + \sum_{i=1}^n \frac{A_i z}{z-p_i}$$

取  $X_o(z)$  的 Z 反变换, 即可求得系统输出在采样时刻的离散值:

$$x_o(kT) = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i p_i^k \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

式中,  $A_0$  为  $x_o(kT)$  的稳态分量;  $\sum_{i=1}^n A_i p_i^k$  为  $x_o(kT)$  的瞬态响应分量, 其中各子分量的形式则取决于闭环极点的性质及其在  $z$  平面上的位置。

实数极点对应的瞬态分量如图 6-5 所示。

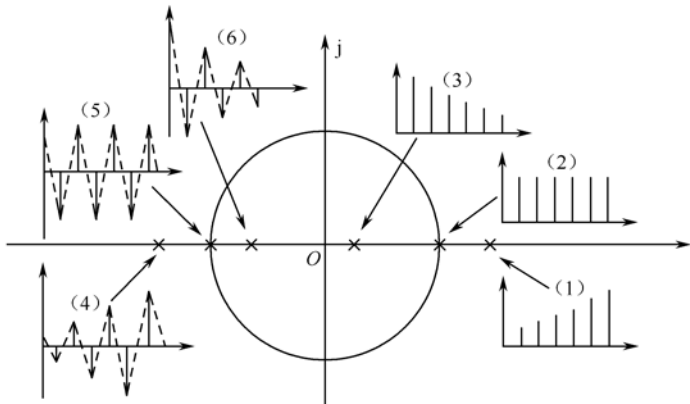


图 6-5 实数极点对应的瞬态分量

- (1)  $p_j > 1$ , 极点位于单位圆外, 系统不稳定。
  - (2)  $p_j = 1$ , 极点在单位圆与正实轴的交点上, 系统处于稳定边界。
  - (3)  $p_j < 1$ , 极点在单位圆内的正实轴上, 则对应的响应分量按指数规律衰减。且极点越靠近原点, 其值越小且衰减越快。
  - (4)  $p_j < -1$ , 极点在单位圆外的负实轴上, 对应的响应分量为正负交替发散振荡形式。
  - (5)  $p_j = -1$ , 极点在单位圆与负实轴的交点上, 对应的响应分量为正负交替等幅振荡形式。
  - (6)  $-1 < p_j < 0$ , 极点在单位圆内的负实轴上, 对应的响应分量为正负交替收敛振荡形式。
- 复数极点对应的瞬态分量如图 6-6 所示。

- (1)  $|p_j| > 1$ , 极点在单位圆外的  $z$  平面上, 响应分量为增幅振荡形式, 系统不稳定。
- (2)  $|p_j| = 1$ , 极点在单位圆上, 对应的响应分量为等幅振荡形式, 系统处于稳定边界。
- (3)  $|p_j| < 1$ , 极点在单位圆内, 对应的响应分量为衰减振荡形式。

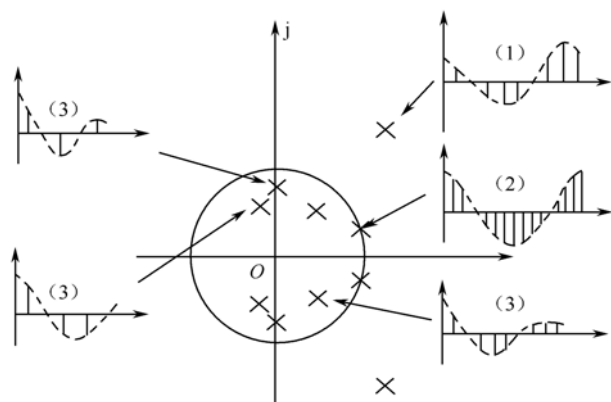


图 6-6 复数极点对应的瞬态分量

为了使采样系统具有良好的过渡过程，其闭环极点应尽量避免配置在单位圆的左半部，尤其不要靠近负实轴。最好配置在单位圆的右半部，而且是靠近原点的地方。这样，系统的过渡过程进行得较快，因而系统的快速性较好。

4. 离散控制系统稳态误差

离散系统的稳态性能用稳态误差描述，其分析方法与连续系统类似，用终值定理求取稳态误差，与系统的输入、型别和参数有关。

静态位置误差系数  $K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)$

静态速度误差系数  $K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)G(z)$

静态加速度误差系数  $K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^2 G(z)$

典型输入信号作用下系统的稳态误差见表 6-1。

表 6-1 典型输入信号作用下系统的稳态误差

系统型别	输入信号		
	$X(t)=1(t)$	$X(t)=t$	$X(t)=\frac{1}{2}t^2$
0	$\frac{1}{1+K_p}$	$\infty$	$\infty$
1	0	$\frac{T}{K_v}$	$\infty$
2	0	0	$\frac{T^2}{K_a}$

采样系统的稳态误差除了与系统的结构、参数和输入信号有关外，还与采样周期  $T$  的大小有关。缩小采样周期  $T$ ，将使系统的稳态误差减小。

6.3 例题题解

例 6.1 已知单位反馈系统的开环脉冲传递函数如下，试用  $w$  平面的劳斯判据判别系统稳

定性。

$$G(z) = \frac{z + 0.7}{(z - 1)(z - 0.368)}$$

**解** 闭环特征方程为

$$1 + G(z) = \frac{z^2 - 1.368z + 0.368 + z + 0.7}{z^2 - 1.368z + 0.368} = \frac{z^2 - 0.368z + 1.068}{z^2 - 1.368z + 0.368} = 0$$

$$\text{即 } z^2 - 0.368z + 1.068 = 0$$

将  $z = \frac{w+1}{w-1}$  代入特征方程

$$\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 - 0.368 \cdot \frac{w+1}{w-1} + 1.068 = 0$$

$$\text{得 } 1.7w^2 - 0.136w + 2.436 = 0$$

列劳斯矩阵

$$\begin{array}{ccc} w^2 & 1.7 & 2.436 \\ w^1 & -0.136 & 0 \\ w^0 & 2.436 & \end{array}$$

可见, 劳斯矩阵的第一列中有两次符号变化, 说明特征方程的两个根都在单位圆之外, 此离散闭环系统不稳定。

**例 6.2** 设单位反馈离散系统的开环脉冲传递函数如下, 试求当  $a=1$ ,  $T=1$  时系统的临界稳定放大系数  $K$ 。

$$G(z) = \frac{K[(aT - 1 + e^{-aT})z + (1 - e^{-aT} - aTe^{-aT})]}{a^2(z-1)(z - e^{-aT})}$$

**解** 令  $1 + G(z) = 0$ , 并将  $a=1$ ,  $T=1$  代入, 得系统的闭环特征方程为

$$z^2 + (0.368K - 1.368)z + 0.264K + 0.368 = 0$$

令  $z = \frac{w+1}{w-1}$ , 将  $z$  平面单位圆映射到  $w$  平面, 得到变换后的系统特征方程:

$$(0.632K - 1)w^2 + (1.264 - 0.528K)w + 2.736 - 0.104K = 0$$

列劳斯矩阵

$$\begin{array}{ccc} w^2 & 0.632K - 1 & 2.736 - 0.104K \\ w^1 & 1.264 - 0.528K & 0 \\ w^0 & 2.736 - 0.104K & \end{array}$$

为使系统稳定, 必须满足:

$$\begin{cases} 0.632K - 1 > 0 \\ 1.264 - 0.528K > 0 \\ 2.736 - 0.104K > 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} K > 1.58 \\ K < 2.39 \\ K < 26.3 \end{cases}$$

为使系统稳定,  $K$  必须同时满足上述 3 个条件, 故系统临界稳定的放大系数为  $K = 2.39$ 。

**例 6.3** 试求下述图 6-7 所示离散系统的稳定临界放大系数  $K$ 。



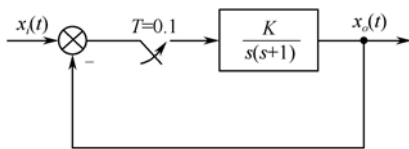


图 6-7 例 6.3 离散系统

**解** 将原连续函数系统的传递函数  $G(s)$  离散化:

$$G(z) = z \left[ \frac{K}{s(s+1)} \right] = z \left[ \frac{K}{s} - \frac{K}{s+1} \right] = \frac{Kz}{z-1} - \frac{Kz}{z-e^{-T}} = \frac{Kz(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

令  $1+G(z)=0$ ,  $a=1$ ,  $T=1$ , 得系统的闭环特征方程为

$$z^2 + [K(1-e^{-T}) - (1+e^{-T})]z + e^{-T} = 0$$

令  $z = \frac{w+1}{w-1}$ , 将  $z$  平面单位圆映射到  $w$  平面, 得到变换后的系统特征方程:

$$K(1-e^{-T})w^2 + 2(1-e^{-T})w - K(1-e^{-T}) + 2(1+e^{-T}) = 0$$

列劳斯矩阵

$$\begin{array}{ccc} w^2 & K(1-e^{-T}) & 2(1+e^{-T}) - K(1-e^{-T}) \\ w^1 & 2(1-e^{-T}) & 0 \\ w^0 & 2(1+e^{-T}) - K(1-e^{-T}) & \end{array}$$

为使系统稳定, 必须满足:

$$\begin{cases} K > 0 \\ K < \frac{2(1+e^{-T})}{(1-e^{-T})} \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} K > 0 \\ K < \frac{3.80}{0.1} = 38 \end{cases}$$

为使系统稳定,  $K$  必须同时满足上述两个条件, 故系统临界稳定的放大系数  $K=38$ 。

**例 6.4** 已知某离散系统如图 6-8 所示,  $T=1\text{s}$ , 试确定使系统稳定  $K$  的取值范围。

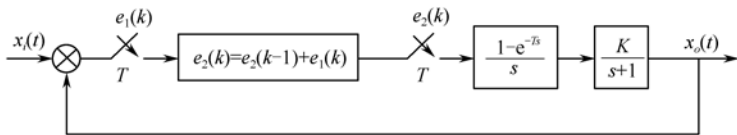


图 6-8 例 6.4 离散系统

**解** 由  $E_2(z) = z^{-1}E_2(z) + E_1(z)$

得:

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{1}{1-z^{-1}} \\ G(z) &= Z \left[ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{K}{s+1} \right] = (1-z^{-1})Z \left[ \frac{K}{s(s+1)} \right] \\ &= K(1-z^{-1}) \left( \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-1}} \right) \end{aligned}$$

$$G(z)D(z) = K\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-1}}\right) = \frac{0.632Kz}{(z-1)(z-0.368)}$$

闭环系统的特征方程为

$$(z-1)(z-0.368) + 0.632Kz = 0$$

即

$$z^2 + (0.632K - 1.368)z + 0.368 = 0$$

令  $z = \frac{w+1}{w-1}$  代入特征方程中, 得:

$$0.632Kw^2 + 1.264w + (2.736 - 0.632K) = 0$$

列劳斯矩阵, 可得渐近稳定条件:  $0 < K < 4.33$ 。

**例 6.5** 设系统如图 6-9 所示, (1) 求系统的闭环  $z$  传递函数; (2)  $K=10$ ,  $T=1$  时, 求系统在单位阶跃、单位速度和单位加速度输入时的稳态误差。

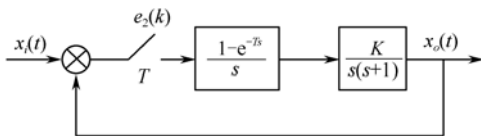


图 6-9 例 6.5 图系统结构图

**解** (1) 系统的开环  $z$  传递函数为

$$GH(z) = z \left[ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{K}{s(s+1)} \right] = \frac{K[(e^{-T} + T - 1)z + (1 - e^{-T} - Te^{-T})]}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

闭环  $z$  传递函数为

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{GH(z)}{1+GH(z)} \\ &= \frac{K[(e^{-T} + T - 1)z + (1 - e^{-T} - Te^{-T})]}{z^2 + [K(e^{-T} + T - 1) - (1 + e^{-T})]z + K(1 - Te^{-T} - e^{-T}) + e^{-T}} \end{aligned}$$

(2)  $K=10$ ,  $T=1$  时, 闭环  $z$  传递函数为

$$\Phi(z) = \frac{3.68z + 2.644}{z^2 + 2.31z + 3.012}$$

系统的误差脉冲函数为

$$\Phi_e(z) = \frac{E(z)}{X_i(z)} = 1 - \Phi(z) = \frac{z^2 - 1.368z + 0.368}{z^2 + 2.31z + 3.012}$$

所以

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \cdot \Phi_e(z)X_i(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{z^2 - 1.368z + 0.368}{z^2 + 2.31z + 3.012} X_i(z) \end{aligned}$$

单位阶跃输入时,  $X_i(z) = \frac{z}{z-1}$ , 稳态误差为

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{z^2 - 1.368z + 0.368}{z^2 + 2.31z + 3.012} \cdot \frac{z}{z-1} = 0$$

单位速度输入时,  $X_i(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$ , 稳态误差为

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{z^2 - 1.368z + 0.368}{z^2 + 2.31z + 3.012} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = 1$$

单位加速度输入时,  $X_i(z) = \frac{T^2 z(1+z)}{2(z-1)^3} = \frac{z(1+z)}{2(z-1)^3}$ , 稳态误差为

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{z^2 - 1.368z + 0.368}{z^2 + 2.31z + 3.012} \cdot \frac{z(1+z)}{2(z-1)^3} = \infty$$

**例 6.6** 某离散系统如图 6-10 所示。图中:  $x_i(t) = t \cdot 1(t)$ ,  $K=1$ ,  $T=1s$ 。(1) 用静态误差系数法计算系统稳态误差  $e_{ss}$ ; (2) 如果去掉采样开关和零阶保持器, 计算系统稳态误差  $e_{ss}$ ; (3) 比较在这两种情况下的稳态误差有什么关系?

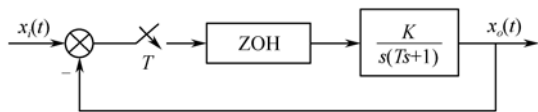


图 6-10 例 6.6 离散系统

**解** (1) 开环脉冲传递函数为

$$G(z) = K(1-z^{-1})Z \left[ \frac{\frac{1}{T}}{s^2(s + \frac{1}{T})} \right] = K \left[ \frac{T}{z-1} - T + \frac{T(z-1)}{z-e^{-1}} \right]$$

将参数代入  $G(z)$ , 可得:

$$G(z) = \frac{e^{-1}z + (1-2e^{-1})}{(z-1)(z-e^{-1})}$$

特征方程为  $z^2 - z + (1-e^{-1}) = 0$ , 不难判定系统是渐近稳定的。

稳定速度误差系数:

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)G(z)] = KT$$

稳定误差:

$$e_{ss} = \frac{T}{K_v} = \frac{1}{K}$$

(2) 去掉采样开关和零阶保持器, 系统的稳态误差系数为

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = K$$

稳态误差:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K}$$

(3) 两种情况下的稳态误差是相同的。

**例 6.7** 已知系统如图 6-11 所示, 其中  $G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$ ,  $G_f(s) = \frac{1}{s+1}$ ,  $x_i(t) = 2t$ ,  $f(t) = 1(t)$ 。

(1) 求系统的稳态误差; (2) 如果在系统中引入零阶保持器, 且  $x_i(t)$  和  $f(t)$  都不变, 问系统的稳态误差将如何变化?

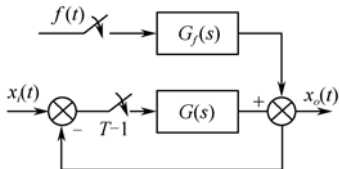


图 6-11 例 6.7 系统结构图

**解** 在离散系统中, 稳态误差的计算与连续系统中类似。当有多个信号同时作用于系统时, 可分别求出各输入信号单独作用时所产生的稳态误差, 再按叠加原理求得总的稳态误差。

(1) 对  $G(s)$ 、 $G_f(s)$  进行 Z 变换, 有:

$$G(z) = \frac{K(1 - e^{-T})z}{(z-1)(z - e^{-T})}, \quad G_f(z) = \frac{z}{z - e^{-T}}$$

对  $x_i(t) = 2t$  的作用, 令  $f(t) = 0$ , 则系统的静态速度误差系数为

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)G(z)] = K$$

稳态误差为

$$e_{ssx_i} = 2 \cdot \frac{T}{K_v} = \frac{2T}{K}$$

对  $f(t) = 1(t)$  的作用, 令  $x_i(t) = 0$ , 则系统误差信号的 Z 变换表达式为

$$E_f(z) = -X_o(z) = -[G(z)E_f(z) + G_f(z)F(z)]$$

即

$$E_f(z) = -\frac{G_f(z)F(z)}{1 + G(z)} = \frac{-z^2}{(z-1)(z - e^{-T}) + K(1 - e^{-T})z}$$

其稳态误差为

$$e_{ssf} = \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1})E_f(z)] = 0$$

在  $x_i(t)$  和  $f(t)$  同时作用下系统的稳态误差为

$$e_{ss} = e_{ssx_i} + e_{ssf} = \frac{2T}{K}$$

(2) 如果在系统中引入零阶保持器, 则系统的结构图如图 6-12 所示。

$$\text{设 } G_k(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{K}{s(s+1)}$$

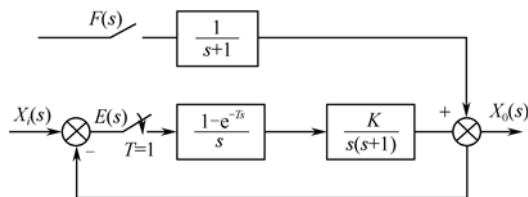


图 6-12 引入零阶保持器后的系统结构图

则有:

$$G_k(z) = K \left[ \frac{T}{z-1} - 1 + \frac{z-1}{z-e^{-T}} \right]$$

此时, 系统误差信号的 Z 变换表达式为

$$E(z) = \frac{X_i(z)}{1+G_k(z)} - \frac{G_f(z)F(z)}{1+G_k(z)} = \frac{\frac{2Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-e^{-T}} \cdot \frac{z}{z-1}}{1+K\left(\frac{T}{z-1} - 1 + \frac{z-1}{z-e^{-T}}\right)}$$

系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1-z^{-1})E(z) \right] = \frac{2}{K}$$

**例 6.8** 设某单位负反馈离散系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{10}{s(s+1)}$$

式中, 采样周期  $T=1$ 。试确定在匀速输入信号  $r(t)=t$  作用下, 使校正后系统响应输入信号时既无稳态误差又能在有限拍内结束的串联校正环节的脉冲传递函数  $D(z)$ 。

**解** 通过 Z 变换求得的给定系统的开环脉冲传递函数  $G(z)$  为

$$G(z) = Z \left[ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{10}{s(s+1)} \right] = \frac{3.68(z+0.718)}{(z-1)(z-0.368)}$$

可见, 给定系统的  $G(z)$  在单位圆外无零点也无极点, 并且  $q=1$ 。按要求, 校正后系统响应  $r(t)=t$  时无稳态误差, 因此校正后的系统应为  $v=II$  型。

因为  $q=1$ ,  $v=II$ , 则系统的理想脉冲传递函数  $\Phi(z)$  为

$$\Phi(z) = 2z^{-1} - z^{-2}$$

按要求选定系统的理想脉冲传递函数  $\Phi(z)$  后, 由未校正系统的开环脉冲传递函数  $G(z)$  确定校正环节的脉冲传递函数  $D(z)$ :

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{\Phi(z)}{G(z)[1-\Phi(z)]} = \frac{(z-1)(z-0.368)}{3.68(z+0.718)} \cdot \frac{2z^{-1} - z^{-2}}{1-2z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{0.543(z-0.368)(z-0.5)}{(z-1)(z+0.718)} \end{aligned}$$

**例 6.9** 如图 6-13 所示串联数字校正离散系统,  $T=1s$ ,  $K=2$ 。利用频率特性 Bode 图法,

对系统进行数字校正。设计要求: (1)  $\gamma \geq 45^\circ$ ,  $K_g \geq 16\text{dB}$ ; (2)  $0.2\text{rad/s} \leq \omega_{pc} \leq 0.4\text{rad/s}$ , 试确定控制器  $D(z)$ 。

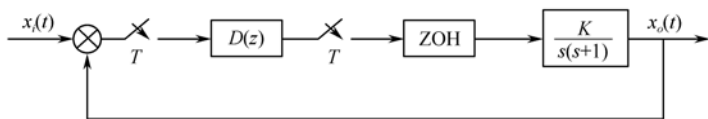


图 6-13 串联数字校正离散系统

解 (1) 原系统开环频率特性 Bode 图如图 6-14 所示。

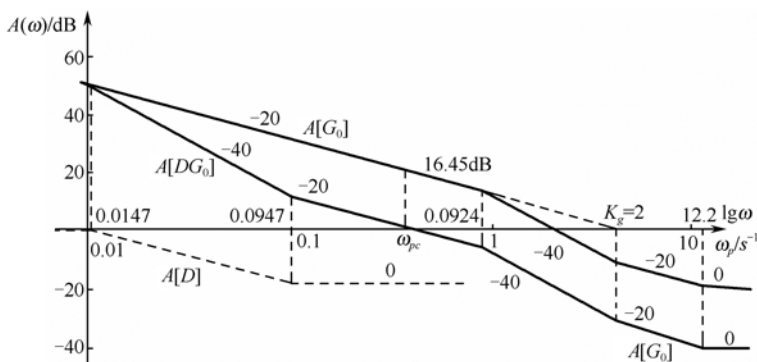


图 6-14 离散系统开环频率特性 Bode 图

$$G_0(s) = (1 - e^{-s}) \left( \frac{2}{s^2} - \frac{2}{s} + \frac{2}{s+1} \right)$$

$$G_0(z) = 2(1 - z^{-1}) \left[ \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-1}} \right] = 2 \frac{0.368z + 0.264}{(z-1)(z-0.368)}$$

令

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w} = \frac{1 + 0.5w}{1 - 0.5w}$$

代入  $G_0(z)$  中, 可得:

$$G_0(w) = 2 \frac{(1 - 0.5w)(1 + 0.082w)}{w(1 + 1.08w)}$$

再令  $w = j\omega_p$   
得:

$$G_0(j\omega_p) = 2 \frac{(1 - j0.5\omega_p)(1 + j0.082\omega_p)}{j\omega_p(1 + j1.08\omega_p)}$$

期望的开环频率特性 Bode 图如图 6-14 所示。中频段按  $\gamma_{\max}$  准则设计成 “-2-1-2” 特性,

取  $\omega_{pc} = 0.3\text{rad/s}$ 。令  $\gamma_{\max} = \arctan \frac{h-1}{2\sqrt{h}} = 45^\circ$ , 可得  $h = 9.47$ ,  $\sqrt{h} = 3.08$ 。

中频段右端频率:  $\omega_{pr} = 0.924 \text{ rad/s}$ , 中频段左端频率:  $\omega_{pl} = \frac{\omega_{pc}}{\sqrt{h}} = 0.0974 \text{ rad/s}$ 。校正后性能指标: 静态特性  $K_v = 2$ ; 动态特性  $\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_{pc}) = 49.7^\circ > 45^\circ$ ;  $\omega_{pg} = 1.45 \text{ rad/s}$ ,  $L_g = 17.6 > 16 \text{ dB}$ 。以上动态性能指标满足要求。

(2) 设计校正环节  $D(z)$ :

$$D(w) = \frac{1 + \frac{w}{0.0974}}{1 + \frac{w}{0.0147}} = 0.151 \frac{w + 0.0974}{w + 0.0147},$$

令

$$w = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} = 2 \frac{z-1}{z+1}$$

得:

$$D(z) = 0.158 \frac{1 - 0.905z^{-1}}{1 - 0.990z^{-1}}$$

**例 6.10** 某数字校正的离散控制系统如图 6-15 所示。(1) 设计数字校正装置  $D(z)$ , 使校正后系统在阶跃输入采样时刻成为无稳态误差的最少拍系统;(2) 计算校正后的输出响应  $c(nT_s)$ 。

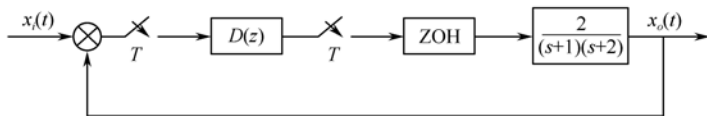


图 6-15 数字校正的离散控制系统

**解** (1) 校正装置  $D(z)$  的设计。

开环脉冲传递函数为

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z \left[ \frac{2}{s(s+1)(s+2)} \right] = \frac{0.4(z+0.368)}{(z-0.368)(z-0.135)}$$

$G(z)$  在单位圆上、单位圆外, 无零点也无极点, 取  $\Phi(z) = z^{-1}$ 、 $\Phi_e(z) = 1 - z^{-1}$ , 则:

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{\Phi(z)}{\Phi_e(z)G(z)} = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{(z-0.368)(z-0.315)}{0.4(z+0.368)} \\ &= 2.5 \frac{(z-0.368)(z-0.315)}{(z-1)(z+0.368)} \end{aligned}$$

$D(z)$  满足  $m \leq n$  可实现的条件。

(2) 校正后的输出响应:

$$C(z) = \Phi(z)R(z) = \frac{1}{z} \frac{z}{z-1} = z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

在暂态时间为一拍时刻:

$$c(nT_s) = \begin{cases} 0 & (n=0) \\ 1 & (n=1, 2, \dots) \end{cases}$$

允许  $D(z)$  含有单位圆上  $z=1$  处的极点。

## 6.4 习题解析

题 6.1 Z 变换的基本性质有哪些?

【解析】熟悉并掌握 Z 变换的基本性质。

解 Z 变换的基本性质有: ①线性; ②延迟性; ③超前性; ④初值定理; ⑤终值定理。

题 6.2 求下列函数的初值和终值:

$$(1) X(z) = \frac{z^2}{(z-0.8)(z-0.1)}$$

$$(2) X(z) = \frac{2}{(1-z^{-1})}$$

$$(3) X(z) = \frac{10z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$(4) X(z) = \frac{4z^2}{(z-1)(z-2)}$$

【解析】理解掌握 Z 变换的初值定理和终值定理, 求取实际系统的初值和终值。

解 (1)  $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2}{(z-0.8)(z-0.1)} = 1$

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2}{(z-0.8)(z-0.1)} (z-1) = 0$$

$$(2) x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2}{1-z^{-1}} = 2$$

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2}{1-z^{-1}} (z-1) = 2$$

$$(3) x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{10z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = 0$$

$$X(z)(z-1) = \frac{10z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} (z-1) = \frac{10z}{z-1}$$

极点在单位圆外, 因此, 原函数无终值。

$$(4) x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{4z^2}{(z-1)(z-2)} = 4$$

$$X(z)(z-1) = \frac{4z^2}{(z-1)(z-2)} (z-1) = \frac{4z^2}{z-2}$$

极点在单位圆外, 因此, 原函数无终值。

题 6.3 某系统的差分方程为

$$\begin{aligned} & 2x_o(nT) + 3x_o[(n-1)T] + 5x_o[(n-2)T] + 4x_o[(n-3)T] \\ & = x_i(nT) + x_i[(n-1)T] + 2x_i[(n-2)T] \end{aligned}$$



求其脉冲传递函数。

【解析】根据 Z 变换和 Z 变换的延迟性定理求取脉冲传递函数。

解 对等式两边求 Z 变换并根据延迟定理，有：

$$(2 + 3z^{-1} + 5z^{-2} + 4z^{-3})X_o(z) = (1 + z^{-1} + 2z^{-2})X_i(z)$$

则

$$G(z) = \frac{X_o(z)}{X_i(z)} = \frac{1 + z^{-1} + 2z^{-2}}{2 + 3z^{-1} + 5z^{-2} + 4z^{-3}}$$

题 6.4 求下列函数的脉冲传递函数  $G(z)$ ：

$$(1) G(s) = \frac{K}{s(s+a)} \quad (2) G(s) = \frac{K}{s^2(s+a)}$$

$$(3) G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \times \frac{K}{s(s+a)}$$

【解析】进行 Z 变换，并根据延迟性定理求取脉冲传递函数  $G(z)$ 。

解 (1) 对  $G(s)$  进行拉普拉斯反变换，得：

$$g(t) = \frac{K}{a(1 - e^{-at})}$$

对上式求 Z 变换，得：

$$G(z) = \frac{K(e^{-a} - 1)(z - 1)}{az[(1 - e^a)z - e^a]}$$

(2) 对  $G(s)$  进行拉普拉斯反变换，得：

$$g(t) = K\left[\frac{1}{at} - \frac{1}{a^2(1 - e^{-at})}\right]$$

对上式求 Z 变换，得：

$$G(z) = K\left(\frac{1}{a} \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{1}{a^2} \left(\frac{z}{z-1} - 1 - e^a\right)\right)$$

$$(3) \quad G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \times \frac{K}{s(s+a)}$$

对上式求 Z 变换，得：

$$\begin{aligned} G(z) &= Z\left[\frac{(1 - e^{-Ts})K}{s^2(s+a)}\right] = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{1}{s^2(s+a)}\right] \\ &= (1 - z^{-1}) \cdot \frac{1}{a^2} Z\left[\frac{a}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+a}\right] \\ &= (1 - z^{-1}) \cdot \frac{1}{a^2} \left[\frac{aTz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z - e^{-aT}}\right] \\ &= \frac{(aT + e^{-aT} - 1)z + 1 - (aT + 1)e^{-aT}}{a^2(z-1)(z - e^{-aT})} \end{aligned}$$

题 6.5 求图 6-16 所示系统的开环脉冲传递函数和闭环脉冲传递函数  $\Phi(z) = \frac{X_i(z)}{X_o(z)}$ 。假定

图中采样开关是同步的。

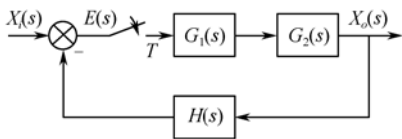


图 6-16 题 6.5 系统结构图

【解析】掌握理解系统框图，求解系统的开环传递函数和闭环传递函数。

解 对于开环系统：

$$G_K(z) = G_1 G_2(z)$$

式中， $G_1 G_2(z) = Z[G_1(s)G_2(s)]$ 。

对于闭环系统：

$$G_B(z) = \frac{G_1 G_2(z)}{1 + G_1 G_2 H(z)}$$

式中， $G_1 G_2 H(z) = Z[G_1(z)G_2(z)G_3(z)]$ 。

题 6.6 求图 6-17 所示系统的开环脉冲传递函数  $G(z)$  及闭环脉冲传递函数  $\Phi(z)$ ，其中  $a=1$ ， $K=1$ 。

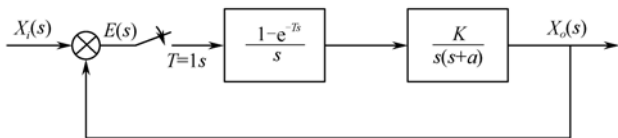


图 6-17 题 6.6 系统结构图

【解析】根据系统的开环传递函数框图求解系统开环脉冲传递函数，并根据框图化简原则求得闭环系统的脉冲传递函数。

解 开环脉冲传递函数为

$$\begin{aligned} G(z) &= Z\left[\frac{(1-e^{-Ts})K}{s^2(s+a)}\right] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{K}{s^2(s+a)}\right] \\ &= (1-z^{-1}) \cdot \frac{K}{a^2} Z\left[\frac{a}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+a}\right] \\ &= (1-z^{-1}) \cdot \frac{K}{a^2} \left[\frac{aTz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-aT}}\right] \\ &= \frac{K[(aT + e^{-aT} - 1)z + 1 - (aT + 1)e^{-aT}]}{a^2(z-1)(z-e^{-aT})} \\ &= \frac{e^{-1}z + 1 - 2e^{-1}}{(z-1)(z-e^{-1})} \end{aligned}$$

闭环脉冲传递函数为

$$G_B(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{K[(aT + e^{-aT} - 1)z + 1 - (aT + 1)e^{-aT}]}{a^2 z^2 + [K(a-1) - a^2 + (K - a^2)e^{-aT}]z + K + (a^2 - K - Ka)e^{-aT}}$$

$$G_B(z) = \frac{e^{-1}z + 1 - 2e^{-1}}{z^2 - z + 1 - e^{-1}}$$

- 题 6.7** 系统结构如图 6-21 所示,  $a = 2$ ,  $T = 0.5$  s。(1) 当  $K = 8$  时, 分析系统的稳定性;  
(2) 求  $K$  的临界稳定值。

**【解析】** 利用劳斯判据判断系统的稳定性, 并运用劳斯判据计算系统稳定时的  $K$  值。

**解** 当  $a = 2$ ,  $T = 0.5$  s 时:

$$G_B(z) = \frac{K(e^{-1}z + 1 - 2e^{-1})}{4z^2 + (K - 4)(1 + e^{-1})z + K + (4 - 3K)e^{-1}}$$

(1) 当  $K = 8$  时:

$$G_B(z) = \frac{2(e^{-1}z + 1 - 2e^{-1})}{z^2 + (1 + e^{-1})z + 2 - 5e^{-1}}$$

因此, 系统的特征方程为

$$z^2 + (1 + e^{-1})z + 2 - 5e^{-1} = 0$$

令  $z = \frac{\omega + 1}{\omega - 1}$ , 则得:

$$2.52\omega^2 + 1.675\omega - 0.204 = 0$$

据此列写出劳斯表

$\omega^2$	2.52	-0.204
$\omega^1$	1.675	0
$\omega^0$	-0.204	0

由此可知系统不稳定。

$$(2) \quad G_B(z) = \frac{K(e^{-1}z + 1 - 2e^{-1})}{4z^2 + (K - 4)(1 + e^{-1})z + K + (4 - 3K)e^{-1}}$$

因此, 系统的特征方程为

$$4z^2 + (1.367K + 5.47)z + 1.47 - 0.103K = 0$$

化简得:

$$z^2 + (0.342K + 1.368)z + 0.368 - 0.025K = 0$$

令  $z = \frac{\omega + 1}{\omega - 1}$ , 则得:

$$0.315K\omega^2 + (1.28 + 0.05K)\omega + 2.734 - 0.365K = 0$$

据此列写出劳斯表

$\omega^2$	0.315K	2.734 - 0.365K
$\omega^1$	1.265 + 0.05K	0
$\omega^0$	2.734 - 0.365K	0

根据劳斯判据得系统稳定的条件为

$$\begin{cases} 0.315K > 0 \\ 2.734 - 0.365K > 0 \end{cases}$$

得:

$$0 < K < 7.49$$

**题 6.8** 系统结构如图 6-18 所示, 试求  $T=1\text{s}$  及  $T=0.5\text{s}$  时, 系统临界稳定时的  $K$  值, 并讨论采样周期  $T$  对稳定性的影响。

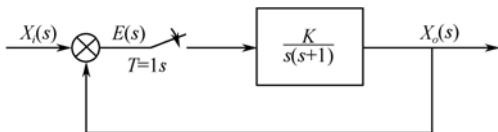


图 6-18 题 6.8 系统结构图

**【解析】** 化简框图获得闭环脉冲传递函数, 当  $T$  取不同值的时, 运用劳斯判据判断系统稳定时  $K$  取何值。

**解** 系统的开环传递函数为

$$G(z) = Z\left[\frac{K}{s(s+1)}\right] = \frac{Kz(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

(1) 当  $T=1\text{s}$  时:

$$G(z) = \frac{Kz(1-e^{-1})}{(z-1)(z-e^{-1})} = \frac{0.632Kz}{(z-1)(z-0.368)}$$

闭环特征方程为

$$D(z) = (z-1)(z-e^{-1}) + Kz(1-e^{-1}) = z^2 + (0.632K - 1.368)z + 0.368 = 0$$

用劳斯判据, 令  $z = \frac{\omega+1}{\omega-1}$ , 代入方程化简后得:

$$K\omega^2 + 2\omega + (4.33 - K) = 0$$

列出劳斯判据表

$\omega^2$	$K$	$4.33 - K$
$\omega^1$	$2$	$0$
$\omega^0$	$4.33 - K$	$0$

根据劳斯判据得系统稳定的条件为

$$0 < K < 4.33$$

(2) 当  $T=0.5\text{s}$  时:

$$G(z) = \frac{Kz(1-e^{-0.5})}{(z-1)(z-e^{-0.5})} = \frac{0.3935Kz}{(z-1)(z-0.6065)}$$

闭环特征方程为

$$D(z) = (z-1)(z-e^{-0.5}) + Kz(1-e^{-0.5}) = z^2 + (0.3935K - 1.6065)z + 0.6065 = 0$$

用劳斯判据, 令  $z = \frac{\omega+1}{\omega-1}$ , 代入方程化简后得:

$$K\omega^2 + 2\omega + (8.165 - K) = 0$$

列出劳斯判据表

$\omega^2$	$K$	$8.165 - K$
$\omega^1$	$3.212$	$0$
$\omega^0$	$8.165 - K$	$0$

根据劳斯判据得系统稳定的条件为

$$0 < K < 8.165$$

**题 6.9** 已知系统结构如图 6-22 所示, 其中  $K=1$ ,  $T=1\text{s}$ , 输入为  $x_i(t)=1(t)+t$ , 试求其稳态误差。

**【解析】** 求解系统的闭环传递函数, 并将对输入  $x_i(t)$  进行 Z 变换。最后利用系统稳态误差定义求解系统的稳态误差。

**解** 如图 6-22 所示系统的开环传递函数为

$$G(z) = \frac{Kz(1-e^{-1})}{(z-1)(z-e^{-1})} = \frac{0.632Kz}{(z-1)(z-0.368)}$$

则系统的闭环传递函数为

$$G_B(z) = \frac{1}{1+G(z)} = \frac{z^2 - 1.368z + 0.368}{z^2 - 0.736z + 0.368}$$

系统输入为:  $x_i(t)=1(t)+t$ 。

对输入进行 Z 变换, 得:

$$X_i(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{z^2}{(z-1)^2}$$

则系统的稳态误差为

$$e_{rss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})G_B(z)X_i(z) = 1$$

# 第 7 章 控制系统的建模仿真

## 7.1 基本要求及重难点

### 基本要求

- 了解 MATLAB/Simulink 工具箱和控制模块;
- 熟练掌握 Simulink 控制模块的基本操作;
- 掌握 MATLAB/Simulink 对系统的建模方法, 并进行时域和频域分析;
- 运用 MATLAB/Simulink 对系统进行分析与校正。

### 教学重点

- MATLAB/Simulink 建模分析的方法与技巧。

### 教学难点

- 系统分析与校正。

## 7.2 本章学习指导

MATLAB (Matrix Laboratory) 是由美国 MathWorks 公司于 20 世纪 80 年代开发出的大型数学计算软件, 它提供了丰富的矩阵运算、图形绘制、数据处理、图像处理等便利工具及多媒体功能。1992 年 Simulink 的出现, 为 MATLAB 提供了新的控制系统模型图形输入与仿真工具。

MATLAB 的主要工具箱有控制系统工具箱、系统辨识工具箱、鲁棒控制工具箱、多变量频率设计工具箱、 $\mu$  分析与综合工具箱、神经网络工具箱、最优化工具箱、信号处理工具箱、模糊推理工具箱、小波分析工具箱等。

MATLAB 的基本操作界面包括 Command Windows (命令窗口)、Current Windows (搜索路径与当前目录)、Workspace (工作空间浏览器) 和 Command History (历史命令浏览器)。

Simulink 模块库包含的子模块库主要有 Commonly Used Blocks (常用模块库)、Continuous (连续系统模块库)、Discontinuities (非线性系统模块库)、Discrete (离散系统模块库)、Logic and Bit Operations (逻辑与位操作模块库)、Lookup Tables (查询表模块库)、Math Operations (数学操作模块库)、Model Verification (模型验证模块库)、Model-Wide Utilities、Ports&Subsystem (接口与子系统模块库)、Signal Attributes (信号属性模块库)、Signal Routing (信号路由模块库)、Sink (输出模块库)、Sources (信号源模块库)、User-Defined Functions (用

户自定义模块库)、Additional Math & Discrete (附加数学和离散系统模块库)。

已知系统数学模型或系统框图下, 利用 Simulink 进行建模的基本步骤如下:

- (1) 启动 Simulink, 打开 Simulink 库浏览器;
- (2) 建立空白模型窗口;
- (3) 由控制系统数学模型或结构框图建立 Simulink 仿真模型;
- (4) 设置仿真参数, 运行仿真;
- (5) 输出仿真结果。

数学模型的 MATLAB/Simulink 实现主要包括模型建立、零极点模型和模型转换, 用到的函数命令有 tf()、zpk()、ss()等。

MATLAB 的控制系统工具箱提供了很多线性系统在特定输入下的仿真函数, 如连续时间系统在单位阶跃输入激励下的仿真函数 step()、单位脉冲激励下的仿真函数 impulse()、零输入响应 initial()、任意函数的激励响应 lsim()等, 能方便地进行时域分析。

通过 MATLAB 提供的绘制系统频率特性 Nyquist 图和 Bode 图的函数, 不仅可以得到系统的频率特性图, 还可以得到系统的幅频特性、相频特性、实频特性和虚频特性, 计算系统的频域特征量。调用控制系统工具箱中的 Nyquist()函数和 bode()函数, 可以绘制系统的 Nyquist 曲线, 分析包括增益裕度、相角裕度及稳定性等系统特性。

利用 MATLAB/Simulink 对系统 Bode 图进行超前校正、滞后校正和 PID 校正, 使系统满足设计要求。

### 7.3 例题题解

例 7.1 如图 7-1 所示为晶闸管-直流电动机转速负反馈单闭环调速系统 (V-M 系统) 的 Simulink 动态结构图, 试求其单闭环系统内小闭环传递函数和系统的闭环传递函数。

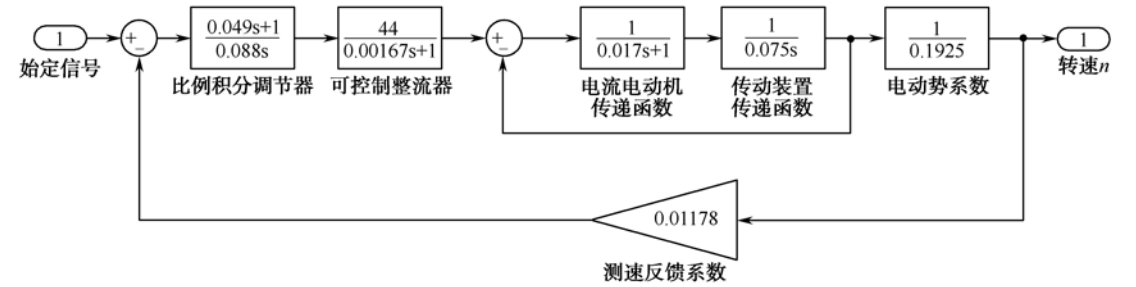


图 7-1 晶闸管-直流电动机转速负反馈单闭环调速系统的 Simulink 动态结构图

解 所求系统的闭环传递函数的 MATLAB 程序如下:

```
n1=[1];d1=[0.017 1];s1=tf(n1,d1);
n2=[1];d2=[0.075 0];s2=tf(n2,d2);
s=s1*s2;
sys1=feedback(s,1)
n3=[0.049 1];d3=[0.088 0];s3=tf(n3,d3);
```

```

n4=[44];d4=[0.00167 1];s4=tf(n4,d4);
n5=[1];d5=[0.1925];s5=tf(n5,d5);
n6=0.01178;d6=1;s6=[n6,d6];
sysq=sys1*s3*s4*s5;
sys=feedback(sysq,0.01178)
Transfer function:
          1
-----
0.001275 s^2 + 0.075 s + 1
Transfer function:
          2.156 s + 44
-----
3.607e-008 s^4 + 2.372e-005 s^3 + 0.001299 s^2 + 0.04234 s + 0.5183

```

**例 7.2** RLC 网络如图 7-2 所示, 试求出以  $u_o$  作为输出、以  $u_i$  作为输入的微分方程与传递函数模型。

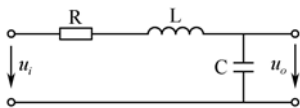


图 7-2 RLC 网络

**解** (1) 求微分方程:

```

clear
clc
syms ai aip ui ul uopp uop uo R L C Uo Ui s;
aip=C*uopp;
ul=L*aip;
ui=R*ai*ul*uo;
ur=subs(ui,ai,uop)

```

程序运行结果:

```
ur =R*uop*L*C*uopp*uo
```

即有微分方程为

$$u_i = LC \frac{d^2 u_o}{dt^2} + RC \frac{du_o}{dt} + u_o$$

**【说明】**

- ① 电感两端的电压  $u_l = L \cdot aip$ , 即  $u_l = \frac{di}{dt}$ 。
- ② 有  $i = C \frac{du_o}{dt}$ , 式  $\frac{di}{dt} = C \frac{d^2 u_o}{dt^2}$  写成  $aip = C \cdot uopp$ 。



③  $U_{opp}$  即为  $u_o^* = \frac{d^2 u_o}{dt^2}$ 。

(2) 求传递函数模型:

```
Uo=simple(Ui*(1/(s*C))/(R+s*L+1/(s*C)));
G=factor(Uo/ui)
```

程序运行结果:

```
G = 1/(R*s*C+s^2*L*C+1)
```

即传递函数为

$$G(s) = \frac{U_o}{U_i} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

例 7.3 已知一个单位负反馈系统  $G(s) = \frac{k}{s(0.5s+1)(4s+1)}$ , 试绘制该系统当  $k$  分别为 1.4、

2.3、3.5 时的单位阶跃响应曲线 (绘制在同一张图上)。

解 (1) 求系统的阶跃响应曲线, 运行 MATLAB 程序如下:

```
clear
clc
num=1;den=conv(conv([1 0],[0.5 1]),[4 1]);
rangek=[1.4 2.5 3.5];
t=linspace(0,20,200)';
for j=1:3
    s1=tf(num*rangek(j),den);
    sys=feedback(s1,1);
    y(:,j)=step(sys,t);
end
plot(t,y(:,1:3)),grid
gtext('k=1.4'),gtext('k=2.3'),gtext('k=3.5')
```

结果如图 7-3 所示。

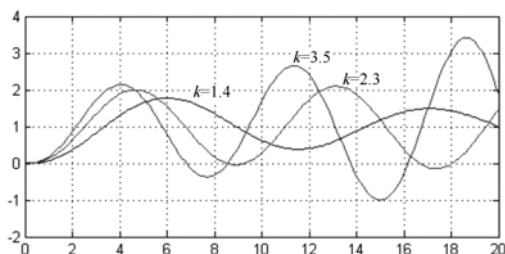


图 7-3 系统的阶跃响应曲线

由曲线可以看出, 当  $k=1.4$  时, 阶跃响应衰减振荡, 系统稳定; 当  $k=2.25$  时, 响应等幅振荡, 系统临界稳定; 当  $k=3.5$  时, 响应振荡发散, 系统不稳定。

例 7.4 如图 7-4 所示的控制系统,  $G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$ , 试判别该闭环系统的稳定性。

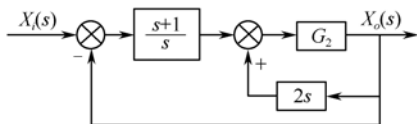


图 7-4 控制系统结构图

解 (1) 输入 MATLAB 程序段:

```
syms s G1 G H1 phi1 phi;
G1=10/(s^2+s);G2=(s+1)/s;
H1=-2*s;phi1=G1/(1+G1*H1);
G=phi1*G2;[n,d]=numden(G/(1+G));
phi=n/d
```

程序段运行结果:

```
phi =10*(s+1)/(s^3-19*s^2+10*s+10)
```

即得系统闭环传递函数为  $G(s) = \frac{10(s+1)}{s^3 - 19s^2 + 10s + 10}$

(2) 求特征根:

```
P=[1-19 10 10];
roots(P)
```

程序运行结果:

```
ans = 18.4279
      1.0763
     -0.5042
```

计算数据表明, 有两个特征根的均为正值, 所以闭环系统不稳定。

例 7.5 设单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_v}{s\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\xi\frac{s}{\omega_n} + 1\right)}$$

式中, 无阻尼固有频率  $\omega_n = 90 \text{ rad/s}$ ; 阻尼比  $\xi = 0.2$ 。试确定速度误差系数  $K_v$  值多大时, 系统才是稳定的, 并用 MATLAB 编程验证。

解 系统的频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega \left[ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j0.4\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \right]}$$

由  $\varphi(\omega_c) = -180^\circ$  推算幅值穿越频率:

$$\varphi(\omega_c) = -90^\circ - \arctan \frac{0.4(\frac{\omega_c}{\omega_n})}{1 - (\frac{\omega_c}{\omega_n})^2} = -180^\circ$$

解得:  $\omega_c = \omega_n = 90 \text{ rad/s}$ 。

由相位裕度  $K_g = 1$  推算速度误差系数  $K_v$  :

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{K_v}{j90 \times j0.4} \right| = 1$$

解得:  $K_v = 36$  。

即速度误差系数  $K_v < 36$  时, 系统是稳定的。

用 MATLAB 编程验证计算结果。

方法一: 用 MATLAB 编程作 Nyquist 图, 验证临界系数正确性。

代入临界稳定系数  $K_v = 36$  , 则:

$$G(s) = \frac{36 \times 90^2}{s(s^2 + 0.4 \times 90s + 90^2)} = \frac{291600}{s^3 + 36s^2 + 8100s}$$

绘制 Nyquist 图的程序如下:

```
Num=[291600];den[1 36 8100 0];
Nyquist(tf(num,den));grid on;
Title('Nyquist Plot of
G(s)=36*90^2/[s(s^2+2*0.2*90s+90^2)]');
```

Nyquist 验证图如图 7-5 (a) 所示。

方法二: 用 MATLAB 控制工具箱中的 MARGIN 函数来计算相对稳定性的相位裕度和相位裕量及对应的穿越频率。

```
Sys=tf([291600],[1 36 8100 0]);margin(sys);
[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(sys);
```

程序运行后, 得到标有相对稳定性的 Bode 图, 如图 7-5 (b) 所示。

分别输入 Gm、Pm、Wcg、Wcp, 得到 Gm=1, Pm=0, Wcg=90, Wcp=90。

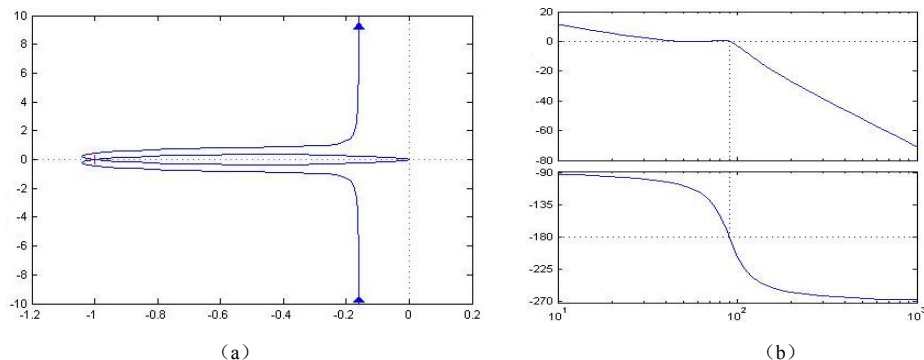


图 7-5 程序验证图

**例 7.6** 已知某系统开环传递函数为  $G(s)H(s) = \frac{10}{s(2s+1)(s^2+0.5s+1)}$ ，试用 Bode 图法判断系统的稳定性能，并做系统的单位阶跃响应曲线验证。

**解** (1) 用 Bode 图对闭环系统判断稳定性：

```
num=[0 0 10];
den=conv(conv([1 0],[2 1]),[1 0.5 1]);
s=tf(num,den);
[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(s)
margin(s)
```

程序运行结果：

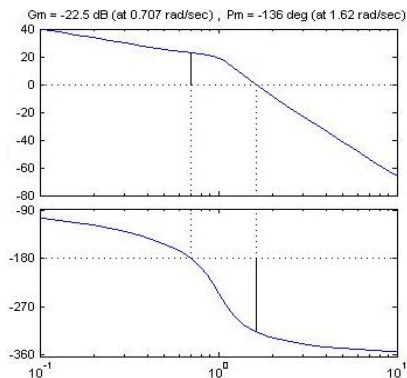
```
Gm =0.0750
Pm =-136.3866
Wcg =0.7067
Wcp = 1.6210
```

绘制出系统的 Bode 图如图 7-6 (a) 所示，提示闭环系统不稳定，并计算出频域性能：幅值裕度  $K_g = 20\log 0.075 = -22.4988\text{dB}$ ；相角裕度  $\gamma = -136.3866^\circ$ ； $-\pi$  穿越频率  $\omega_g = 0.7067\text{s}^{-1}$ ；剪切频率  $\omega_c = 1.6210\text{s}^{-1}$ 。相角裕度为负值，说明系统部不稳定。

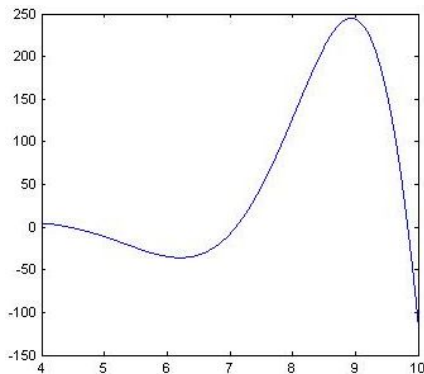
(2) 绘制系统单位阶跃响应曲线验证的稳定性：

```
num=[0 0 10];
den=conv(conv([1 0],[2 1]),[1 0.5 1]);
s=tf(num,den);
sys=feedback(s,1);
t=0:0.01:10;
step(sys,t)
```

程序运行后绘制系统的单位阶跃响应曲线如图 7-6 (b) 所示，闭环系统的单位阶跃响应是发散的振荡，表明系统不稳定，验证了用 Bode 图判定系统不稳定的结论。



(a)



(b)

图 7-6 程序绘制系统 Bode 图和单位阶跃响应曲线

例 7.7 续【例 7.1】将晶闸管-直流电动机转速负反馈单闭环的转速（比例积分）调节器改换为 PID 调节器如图 7-7 所示。（1）分析比例调节作用；（2）分析积分调节的作用；（3）分析微分调节的作用。

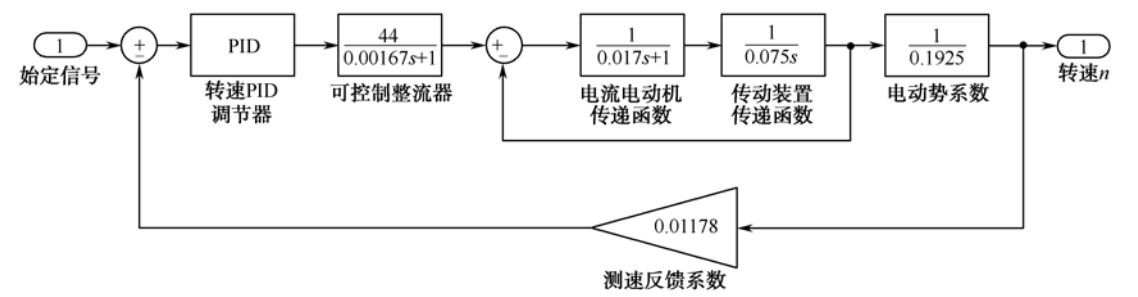


图 7-7 PID 调节的 Simulink 动态结构图

解 （1）比例调节作用分析。为分析纯比例调节的作用，考查当  $T_d = 0$ ， $T_i = \infty$ ， $K_p = 1 \sim 5$  时对系统阶跃给定响应的影响，根据图 7-7 所示的数据给出如下 MATLAB 程序：

```
G1=tf(1,[0.017 1]);G2=tf(1,[0.075 0]);
G12=feedback(G1*G2,1);G3=tf(44,[0.00167 1]);
G4=tf(1,0.1925);G=G12*G3*G4;Kp=[1:1:5];
for i=length(Kp)
    Gc=feedback(Kp(i)*G,0.01178);
    step(Gc),hold on
end
axis([0,0.2,0,130])
gtext('1 Kp=1'),
gtext('2 Kp=2'),
gtext('3 Kp=3'),
gtext('4 Kp=4'),
gtext('5 Kp=5'),
```

运行程序后由系统 P 控制阶跃给定响应曲线（如图 7-8 所示）可以看出，随着  $K_p$  值加大，闭环系统的超调量加大，系统影响速度加快。仿真结果表明当  $K_p \geq 21$  后，系统变为不稳定。

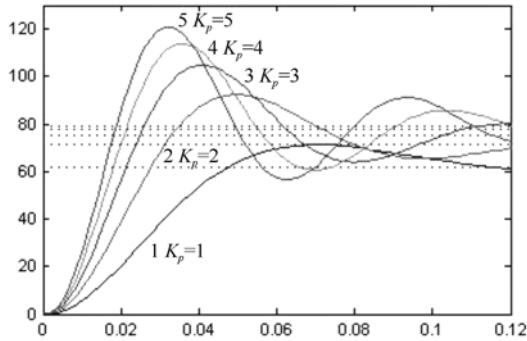


图 7-8 系统 P 控制阶跃给定响应曲线

(2) 积分调节的作用分析。当为分析方便, 比例积分调节器保持  $K_p=1$  时, 考查当  $T_i=0.03\sim 0.07$  时对系统阶跃响应的影响, 根据图 7-7 所示结构, 给出 MATLAB 程序如下:

```
G1=tf(1,[0.017 1]);G2=tf(1,[0.075 0]);
G12=feedback(G1*G2,1);G3=tf(44,[0.00167 1]);
G4=tf(1,0.1925);G=G12*G3*G4;
kp=1;Ti=[0.03:0.01:0.07];
for i=1:length(Ti)
    Gc=tf(kp*[Ti(i) 1],[Ti(i) 0]);
    Gcc=feedback(Gc*G,0.01178);
    step(Gcc),hold on
end
axis([0,0.2,0,130])
gtext('1 Ti=0.01'),
gtext('2 Ti=0.02'),
gtext('3 Ti=0.03'),
gtext('4 Ti=0.04'),
gtext('5 Ti=0.05'),
```

运行程序后由系统 PI 控制阶跃给定响应曲线 (如图 7-9 所示) 可以看出, 保持  $K_p=1$  不变时, 在本程序设定值的范围内, 随着  $T_i$  值的加大, 闭环系统超调量减小, 系统响应速度略微变慢。

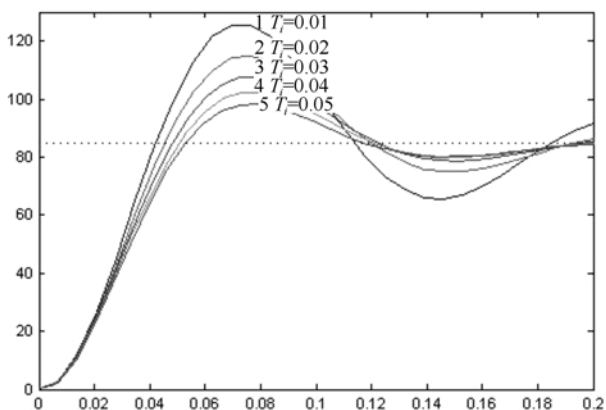


图 7-9 系统 PI 控制阶跃给定响应曲线

(3) 微分调节的作用分析。为分析方便起见, 对比例积分微分调节器保持  $K_p=0.01$ ,  $T_i=0.01$  时, 特别考查当  $T_d=12\sim 84$  时对系统阶跃给定响应的影响, 由图 7-7 所示的数据, 给出 MATLAB 程序如下:

```
G1=tf(1,[0.017 1]);G2=tf(1,[0.075 0]);
G12=feedback(G1*G2,1);G3=tf(44,[0.00167 1]);
G4=tf(1,0.1925);G=G12*G3*G4;
kp=0.01;Ti=0.01;
Td=[12:36:84];
for i=1:length(Td)
    Gc=tf(kp*[Ti*Td(i) Ti 1],[Ti 0]);
    Gcc=feedback(G*Gc,0.01178);
    step(Gcc),hold on
end
```

```
end
gtext('1 Td=12'),
gtext('2 Ti=48'),
gtext('3 Ti=84'),
```

运行程序后由系统 PID 控制阶跃给定响应曲线（如图 7-10 所示）可以看出：第一，由于单闭环调速系统的参数配合的特殊性，以及微分环节的作用，在曲线的起始上升段呈现尖锐的波峰，之后曲线也呈衰减的振荡；第二，当保持  $K_p = 0.01$ ， $T_i = 0.01$  不变时，在本程序设定的  $T_d$  范围内，随着  $T_d$  值的加大，闭环系统的超调量增大，但经曲线尖锐的起始上升段后响应速度有所变慢。

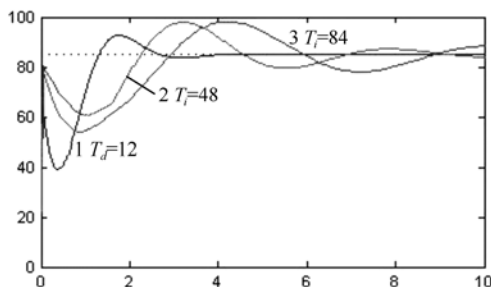


图 7-10 系统 PID 控制阶跃给定响应曲线

## 7.4 习题题解

题 7.1 系统的传递函数如下，试用 MATLAB 语句建立传递函数模型。

$$G(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 4s + 8}{s^4 + 16s^3 + 80s^2 + 17s + 10}$$

【解析】掌握 tf() 用法，运用 MATLAB 求解系统的传递函数。

解

```
>> num=[1 2 4 8];
>> den=[1 16 80 17 10];
>> sys=tf(num,den)
Transfer function:
      s^3 + 2 s^2 + 4 s + 8
-----
s^4 + 16 s^3 + 80 s^2 + 17 s + 10
```

题 7.2 已知系统的传递函数如下，试在 MATLAB 中生成系统的传递函数模型。

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{s^2(s+3)(s^2+6s+10)}$$

【解析】掌握 tf() 用法，运用 MATLAB 求解系统的传递函数。

解

```
>> num=[10 10];
>> den=conv([1 3 0 0],[1 6 10]);
```

```
>> sys=tf(num,den)
Transfer function:
      10 s + 10
-----
s^5 + 9 s^4 + 28 s^3 + 30 s^2
```

**题 7.3** 已知一控制系统的数学模型如下，试用 MATLAB 语句建立系统零极点模型。

$$G(s) = \frac{2(s+3)(s+5)}{(s+2)(s+4)(s+6)}$$

**【解析】**掌握 zpk() 用法。

**解**

```
>> z=[-3;-5];
>> p=[-2;-4;-6];
>> K=2;
>> G=zpk(z,p,K)
Zero/pole/gain:
      2 (s+3) (s+5)
-----
(s+2) (s+4) (s+6)
```

**题 7.4** 已知一单位负反馈系统的开环传递函数如下，试绘制系统的单位阶跃响应曲线。

$$G(s) = \frac{2s+1}{s(s+2)(s+0.5)}$$

**【解析】**掌握 step() 用法，运用 MATLAB 求解系统的单位阶跃响应。

**解**

```
>> num=[2 1];
>> den=conv([1 2 0],[1 0.5]);
>> sys=tf(num,den);
>> step(sys)
```

其结果如图 7-11 所示。

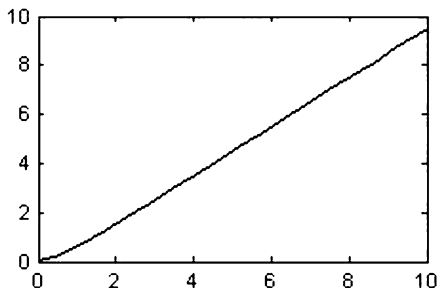


图 7-11 系统的单位阶跃响应曲线

**题 7.5** 已知反馈系统的开环传递函数如下，试求其单位脉冲响应。

$$G_k(s) = \frac{0.2(s+2)}{s(s+0.5)(s+0.8)(s+3)}$$

**【解析】**掌握 impulse() 用法，运用 MATLAB 求解系统的单位脉冲响应。



解

```
>> num=[0.2 0.4];
>> den=conv([1 1 0],conv([1 10],[1 2 4]));
>> sys=tf(num,den);
>> impulse(sys)
```

其结果如图 7-12 所示。

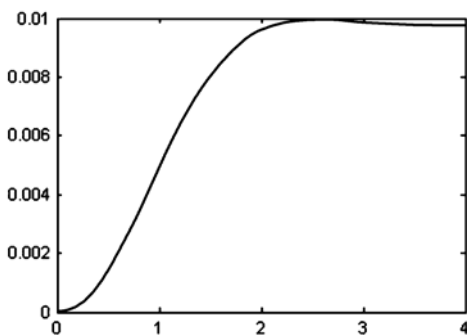


图 7-12 系统的单位脉冲响应

**题 7.6** 已知单位反馈系统的开环传递函数如下，试绘制系统的 Bode 图。

$$G_k(s) = \frac{100(s+4)}{s(s+1)(s+10)(s^2+2s+4)}$$

**【解析】**掌握 bode() 用法，运用 MATLAB 求解系统的 Bode 图。

解

```
>> num=[100 400];
>> den=conv([1 1 0],conv([1 10],[1 2 4]));
>> sys=tf(num,den);
>> bode(sys)
```

其结果如图 7-13 所示。

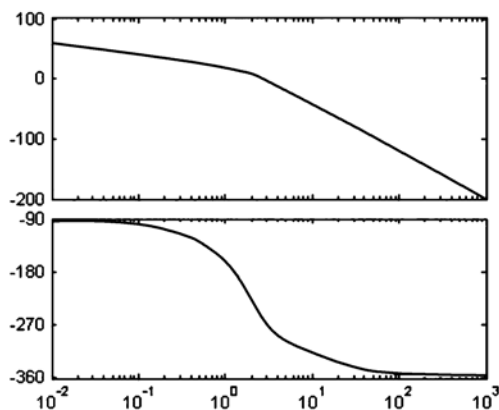


图 7-13 系统 Bode 图

**题 7.7** 已知控制系统问题 7.6, 求系统的幅值裕度和相位裕度, 并判断系统的稳定性。

**【解析】** 掌握 `margin()` 用法, 运用 MATLAB 求解系统的幅值裕度和相位裕度。

**解**

```
>> num=[100 400];
>> den=conv([1 1 0],conv([1 10],[1 2 4]));
>> sys=tf(num,den);
>> margin(sys)
```

其结果如图 7-14 所示。

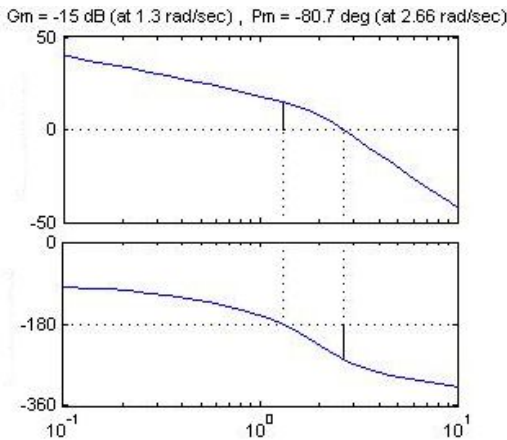


图 7-14 系统的幅值裕度和相位裕度

**题 7.8** 已知典型二阶系统如下, 令  $\omega_n = 1$ , 分别作出  $\xi = 2, 1, 0.0707, 0.5$  时的 Nyquist 曲线图。

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

**【解析】** 掌握 `nyquist()` 用法, 运用 MATLAB 画出系统的 Nyquist 曲线图。

**解**

```
>> num=1;
>> A=[2 1 0.0707 0.5];
>> for i=1:1:4;
    den=[1 2*A[i] 1];
    sys=tf(num,den);
    subplot(4,1,i);
    nyquist(sys);
>> end
```

其结果如图 7-15 所示。

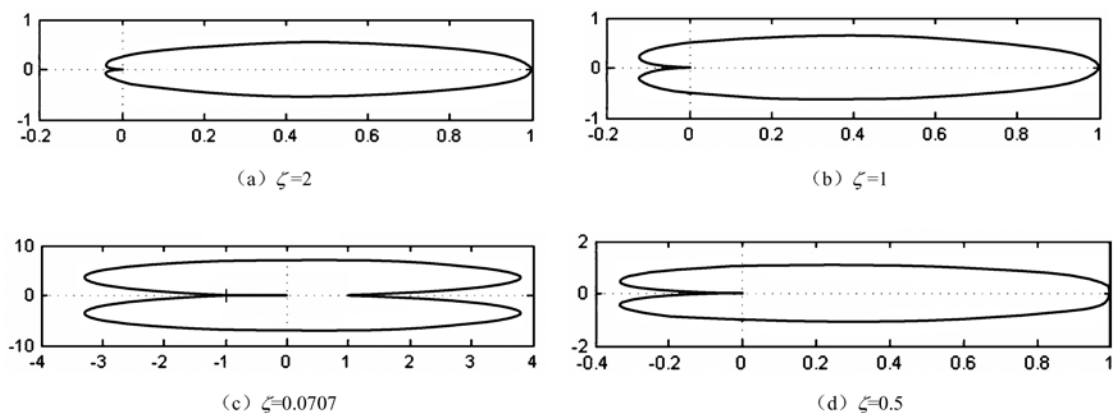


图 7-15 二阶系统的 Nyquist 曲线图

**题 7.9** 已知一单位反馈系统的开环传递函数如下：

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

试设计超前校正装置  $G_c(s)$ ，使系统满足如下指标：在单位斜坡输入下的稳态误差  $e_{ss} \leq 0.1$ ；相角裕度  $\gamma > 45^\circ$ ；幅值裕度  $K_g \geq 10\text{dB}$ 。

**【解析】** 掌握运用 MATLAB 分析系统动静态性能，并校正系统。

**解** 根据稳态误差要求调整  $K$ 。未加校正时，系统在  $r(t)=t$  作用下的稳态误差可由终值定理求出：

$$e_{rss} = \frac{1}{K}$$

要求  $e_{rss} \leq 0.1$ ，则  $K \geq 10$ ，取定  $K=10$ 。

根据未校正时系统的 Bode 图，检测频域性能指标是否满足题目要求。执行如下 MATLAB 程序：

```
>> G=tf(10,[1 1 0]);
>> margin(G);
```

程序运行后可得到如图 7-16 所示的未校正系统的 Bode 图与频域性能指标。该图可知系统的相角裕度  $18^\circ$ ；幅值裕度  $\infty$ 。相角裕度不满足要求。则在此基础上超前校正控制器设计程序如下：

```
>> phy=45-18; phy1=phy+8;
>> phy2=phy1*pi/180;
>> a=(1+sin(phy2))/(1-sin(phy2));
>> M1=1/sqrt(a);
>> [m,p,w]=bode(G);
>> Wc1=spline(m,w,M1);
>> T=1/(Wc1*sqrt(a));
>> Gc=tf([a*T 1],[T 1]);
```

```

Transfer function:
0.04308 s + 1
-----
0.01324 s + 1
>> sys=Gc*G;
>> margin(sys)

```

其结果如图 7-17 所示。

校正后系统 Bode 图如图 7-17 所示，可见相角裕度和幅值裕度均满足设计要求。

Gm = Inf dB (at Inf rad/sec), Pm = 18 deg (at 3.08 rad/sec)

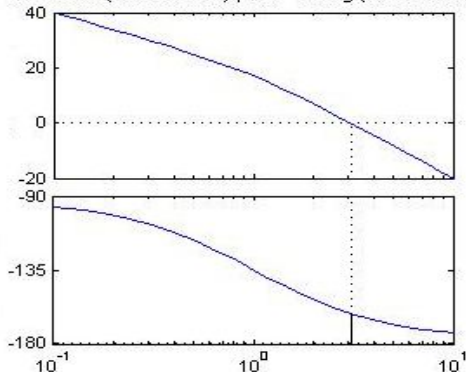


图 7-16 未校正系统的 Bode 图与频域性能指标

Gm = Inf dB (at Inf rad/sec), Pm = 48 deg (at 4.33 rad/sec)

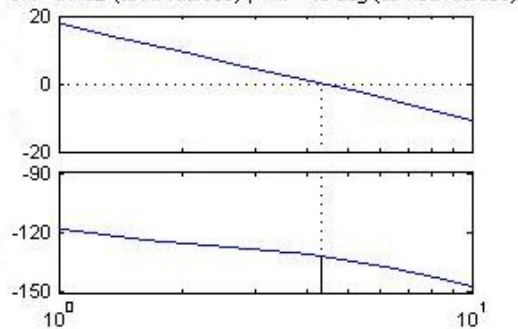


图 7-17 校正后系统 Bode 图

**题 7.10** 已知控制系统的开环传递函数如下：

$$G_k(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$$

试设计滞后校正装置  $G_c(s)$ ，使系统满足指标： $K_v = 30$ ；相角裕度  $\gamma > 40^\circ$ ；幅值裕度  $L_g \geq 10\text{dB}$ 。

**【解析】** 运用 MATLAB 分析系统动静态性能，并校正系统。

**解**

```

>> num=30;
>> den=conv([1 0],conv([0.1 1],[0.2 1]));
>> Gk=tf(num,den);
>> margin(Gk);

```

程序运行后可得到如图 7-18 所示的未校正系统的 Bode 图与频域性能指标。由该图可知系统的相角裕度为  $-17.2^\circ$ ；幅值裕度为  $-6.02$ 。相角裕度及幅值裕度均不满足要求，则在此基础上滞后校正控制器设计程序如下：

```

>> gama=40; phyl=-180+gama+10;
>> [m,p,w]=bode(Gk);
>> Wc1=spline(p,w,phyl);
>> M1=spline(p,m,phyl);

```

```
>>b=1/M1;
>>T=10/(b*Wc1);
>>Gc=tf([b*T 1],[T 1]);
Transfer function:
3.654 s + 1
-----
33.89 s + 1
>>sys=Gc*Gk;
>>margin(sys);
```

校正后系统 Bode 图如图 7-19 所示, 可见相角裕度和幅值裕度均满足设计要求。

图 7-18 未校正系统的 Bode 图与频域性能指标

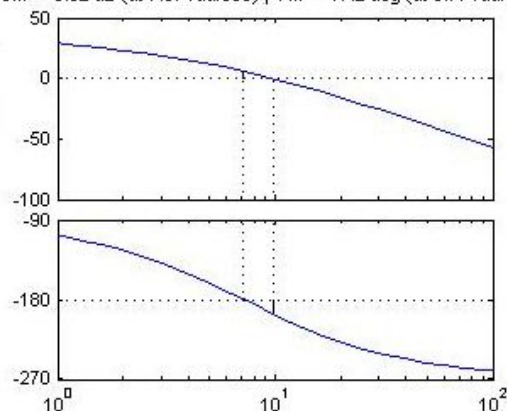


图 7-19 校正后系统 Bode 图

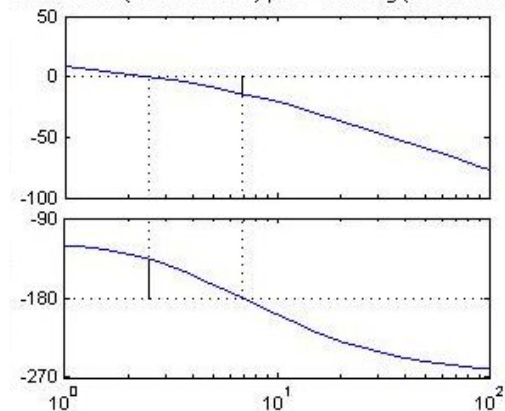


图 7-18 未校正系统的 Bode 图与频域性能指标

图 7-19 校正后系统 Bode 图

题 7.11 已知系统的开环传递函数为

$$G_k(s) = \frac{K}{s(0.15s+1)(5 \times 10^{-3}s+1)(0.877 \times 10^{-3}s+1)}$$

试设计 PID 校正装置, 使系统  $K_v \geq 40$ ,  $\gamma \geq 50^\circ$ ,  $\omega_c' \geq 50 \text{ rad/s}$ 。

【解析】掌握运用 MATLAB 分析系统动静态性能, 并设计 PID 校正装置。

解

```
>>clear
>>clc
>>num=40;
>>den=conv([0.15,1,0],conv([5*10^-3,1],[0.877*10^-3,1]));
>>sys0=tf(num,den);
>>grid on
>>margin(sys0)
>> [gm0,pm0,wg0,wp0]=margin(sys0)
gm0 =4.3777
pm0 =17.8332
```

```
wg0 =33.5969
wp0 =15.6376
```

由结果可知相角裕度为  $17.8^\circ < 50^\circ$ , 截止频率为  $15.6 < 50$ , 均不满足系统要求。

设计 PID 校正装置, 根据系统要求, 取  $K_p = 1.4$ ,  $T_d = 0.15$ , 则 PID 传递函数为

$$G_c(s) = 1.4(1 + 0.15s)$$

```
>> numc=[1.4*0.15,1.4];
>> denc=1;
>> sysc=tf(numc,denc);
>> sys=sys0*sysc;
>> hold on
>> margin(sys)
>> [gm,pm,wg,wp]=margin(sys)
gm = 23.9331
pm = 72.1789
wg = 477.5460
wp = 54.0004
```

由计算结果可知, 校正后系统的相角裕度为  $72.17^\circ > 50^\circ$ , 截止频率为  $7.84 > 4$ , 满足性能指标要求。校正前、后的 Bode 图如图 7-20 所示。

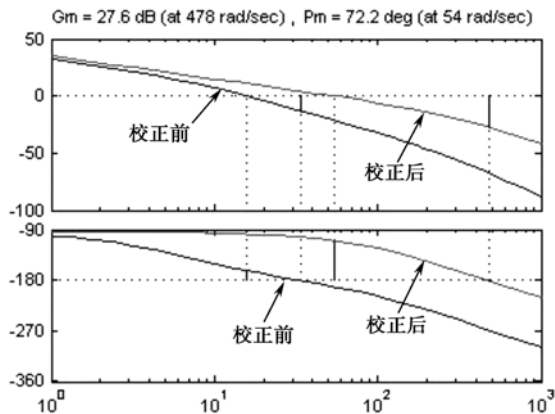


图 7-20 校正前、后的系统 Bode 图

**题 7.12** 已知控制系统的传递函数如下, 试用 MATLAB 将此连续系统离散化, 设  $T=0.5s$ 。

$$G(s) = \frac{5(s+1)}{s(s^2 + 2s + 6)}$$

**【解析】** 掌握 `[n_zoh,d_zoh]=c2dm(num,den,ts)` 的用法, 掌握 MATLAB 将连续系统离散化的方法。

**解**

```
>> num=[5,5];
>> den=[1,2,6,0];
```

```
>> ts=0.5;
>> [n_zoh,d_zoh]=c2dm(num,den,ts);
>> tf(n_zoh,d_zoh,ts)
```

其结果为

```
Transfer function:
      0.4033 z^2 + 0.06632 z - 0.1881
-----
      z^3 - 0.5662 z^2 - 0.06591 z - 0.3679
Sampling time: 0.5
```

题 7.13 连续系统的闭环传递函数为

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{(s+2)(s+5)}$$

试绘制连续系统的单位阶跃响应，以及  $T=0.1\text{s}$  时离散系统的单位阶跃响应。

【解析】掌握 `dstep(n_zoh,d_zoh,36);` 的用法，掌握运用 MATLAB 求解离散系统的单位阶跃响应。

解

```
>> num=[5,5];
>> den=[1,2,6,0];
>> ts=0.5;
>> [n_zoh,d_zoh]=c2dm(num,den,ts);
>> tf(n_zoh,d_zoh,ts)
>>i=[0:35];
>>time=1*ts;
>> [n_zoh,d_zoh]=c2dm(num,den,ts);
>>dstep(n_zoh,d_zoh,36);
```

其结果如图 7-21 所示。

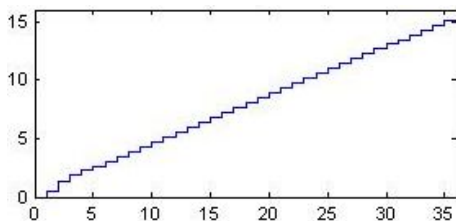


图 7-21 连续系统的单位阶跃响应

# 附录 A L 变换与 L 逆变换

拉普拉斯变换是一种函数之间的积分变换，是研究控制工程的一种基本数学工具。利用拉普拉斯变换建立控制系统的传递函数、频率特性等，在系统分析中发挥着重要作用。拉普拉斯变换的优点如下：

(1) 从数学角度看，拉普拉斯变换可以将“微分”与“积分”运算转换成“乘法”和“除法”运算，即把积分微分方程转换为代数方程。对于指数函数、超越函数以及某些非周期性的具有不连续点的函数，用古典方法求解比较烦琐，经拉普拉斯变换可转换为简单的初等函数，求解就很方便。

(2) 当求解系统的输入/输出微分方程时，求解的过程得到简化，并可以同时获得控制系统的瞬态分量和稳态分量。

(3) 拉普拉斯变换可以把时域中的两个函数的卷积运算转换为复数域中的两个函数的乘法运算。在此基础上，建立控制系统传递函数的概念。

## A.1 拉普拉斯变换的定义

设有时间函数  $f(t)$ ，是定义在  $(0, +\infty)$  上的实值函数，则称其无穷积分

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (\text{A-1})$$

为  $f(t)$  的拉普拉斯变换，简称拉氏变换。式中， $L$  为拉普拉斯变换符号； $s$  为复变量； $f(t)$  为原函数，小写； $F(s)$  为  $f(t)$  的拉普拉斯变换的像函数，大写。

## A.2 典型函数的拉普拉斯变换

在实际中，对系统进行分析所需的输入信号经常可以简化为一个或几个简单的信号，这些信号可用一些典型时间函数来表示。

### 1. 单位阶跃函数的拉普拉斯变换

单位阶跃函数定义为

$$1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{A-2})$$

由拉普拉斯变换的定义，得：

$$L[1(t)] = \int_0^{+\infty} 1(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s}e^{-st} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s} \quad (\text{A-3})$$



## 2. 单位脉冲函数的拉普拉斯变换

单位脉冲函数定义为

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \quad (\text{A-4})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \text{且} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0) \quad (\text{A-5})$$

式中,  $f(0)$  为  $t=0$  时刻的  $f(t)$  的函数值。由拉普拉斯变换定义, 得:

$$L[\delta(t)] = \int_0^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-st} \Big|_{t=0} = 1 \quad (\text{A-6})$$

## 3. 单位斜坡函数的拉普拉斯变换

单位斜坡函数定义为

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{A-7})$$

由拉普拉斯变换的定义, 得

$$L[t] = \int_0^{+\infty} t e^{-st} dt = -\frac{1}{s} \left[ t e^{-st} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-st} dt \right] = \frac{1}{s^2} \quad (\text{A-8})$$

## 4. 指数函数的拉普拉斯变换

指数函数定义为

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\alpha t} & t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{A-9})$$

由拉普拉斯变换的定义, 得

$$L[e^{-\alpha t}] = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+\alpha)t} dt = \frac{1}{s+\alpha} \quad (\text{A-10})$$

## 5. 正弦函数的拉普拉斯变换

根据欧拉公式, 得:

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

由拉普拉斯变换的定义, 可求得:

$$\begin{aligned} L[\sin \omega t] &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} (e^{-(s-j\omega)t} - e^{-(s+j\omega)t}) dt \\ &= \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right) \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (\text{A-11})$$

6. 余弦函数的拉普拉斯变换

根据欧拉公式，得：

$$\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

由拉普拉斯变换的定义，得：

$$\begin{aligned} L[\cos \omega t] &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (e^{-(s-j\omega)t} + e^{-(s+j\omega)t}) dt \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega} \right) \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned} \tag{A-12}$$

表 A-1 所示为常用函数的拉普拉斯变换对照表。

表 A-1 常用函数的拉普拉斯变换对照表

序 号	原函数 $f(t)(t \geq 0)$	拉普拉斯变换 $F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$t^n (n = 1, 2, 3, \cdots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
5	$t^n e^{-at} (n = 1, 2, 3, \cdots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
6	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
7	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
8	$\sin \omega_n t$	$\frac{\omega_n}{s^2 + \omega_n^2}$
9	$\cos \omega_n t$	$\frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$
10	$e^{-at} \sin \omega_n t$	$\frac{\omega_n}{(s+a)^2 + \omega_n^2}$
11	$e^{-at} \cos \omega_n t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_n^2}$
12	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t)$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (0 < \xi < 1)$
13	$\frac{-1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t - \beta)$	$\frac{s}{s^2 + \xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (0 < \xi < 1)$
14	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \beta)$	$\frac{\omega_n}{s(s^2 + \xi\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (0 < \xi < 1)$

注：表中  $\beta = \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$

## A.3 拉普拉斯变换的主要定理

本节列出拉普拉斯变换的主要定理，证明从略。

### 1. 线性定理

已知函数  $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$  的拉普拉斯变换为  $F_1(s)$ 、 $F_2(s)$ ，对于常数  $k_1$ 、 $k_2$ ，有：

$$L[k_1 f_1(t) \pm k_2 f_2(t)] = k_1 F_1(s) \pm k_2 F_2(s) \quad (\text{A-13})$$

### 2. 实数域的位移定理

已知函数  $f(t)$  的拉普拉斯变换为  $F(s)$ ，则对任一正实数  $\alpha$ ，有：

$$L[f(t - \alpha)] = e^{-\alpha s} F(s) \quad (\text{A-14})$$

### 3. 复数域的位移定理

已知函数  $f(t)$  的拉普拉斯变换为  $F(s)$ ，则对任一常数  $\alpha$ ，有：

$$L[f(t)e^{-\alpha t}] = F(s + \alpha) \quad (\text{A-15})$$

### 4. 微分定理

已知函数  $f(t)$  的拉普拉斯变换为  $F(s)$ ，则有：

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = L[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

式中， $f(0)$  为函数  $f(t)$  在  $t=0$  时的值。同理可推导出函数  $f(t)$  各阶导数的拉普拉斯变换为

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

式中， $f'(0)$ ， $\cdots$ ， $f^{(n-1)}(0)$  分别为函数  $f(t)$  的各阶导数在  $t=0$  时的值。

当函数  $f(t)$  的各阶导数的初始值均为零时，微分定理转换为

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = L[f'(t)] = sF(s) \quad (\text{A-16})$$

⋮

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) \quad (\text{A-17})$$

### 5. 积分定理

已知函数  $f(t)$  的拉普拉斯变换为  $F(s)$ ，则有：

$$L\left[\int f(t)dt\right] = \frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} f^{(-1)}(0)$$

式中,  $f^{(-1)}(0)$  为积分  $\int f(t)dt$  在  $t=0$  时的值。同理, 可推导出函数  $f(t)$  各重积分的拉普拉斯变换为

$$L\left[\iint\cdots\int f(t)(dt)^n\right] = \frac{1}{s^n}F(s) + \frac{1}{s^n}f^{(-1)}(0) + \frac{1}{s^{n-1}}f^{(-2)}(0) + \cdots + \frac{1}{s}f^{(-n)}(0)$$

当函数  $f(t)$  的各阶导数的初始值均为零时, 积分定理转换为

$$L\left[\int f(t)dt\right] = \frac{1}{s}F(s) \quad (\text{A-18})$$

⋮

$$L\left[\iint\cdots\int f(t)(dt)^n\right] = \frac{1}{s^n}F(s) \quad (\text{A-19})$$

## 6. 初值定理

已知函数  $f(t)$  的拉普拉斯变换为  $F(s)$ , 则有:

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s) \quad (\text{A-20})$$

## 7. 终值定理

已知函数  $f(t)$  的拉普拉斯变换为  $F(s)$ , 则有:

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (\text{A-21})$$

## 8. 卷积定理

已知函数  $f(t)$  的拉普拉斯变换为  $F(s)$ , 函数  $g(t)$  的拉普拉斯变换为  $G(s)$ , 有:

$$L[f(t) * g(t)] = L\left[\int_0^t f(t-\lambda)g(\lambda)d\lambda\right] = F(s)G(s) \quad (\text{A-22})$$

式中,  $f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\lambda)g(\lambda)d\lambda$  为  $f(t)$  与  $g(t)$  的卷积。此定理表明两个原函数的卷积的拉普拉斯变换等于它们的拉普拉斯变换的乘积。

# A.4 拉普拉斯逆变换

## 1. 拉普拉斯逆变换的定义

将像函数  $F(s)$  变换成与之相应的原函数  $f(t)$  的过程称为拉普拉斯逆变换。其定义公式为

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(s)e^{st}ds \quad (\text{A-23})$$

式中,  $L^{-1}$  为拉普拉斯逆变换符号。

利用式 (A-23) 直接进行拉普拉斯逆变换的求取要用到复变函数积分, 求解过程复杂。因此进行拉普拉斯逆变换的计算时, 对于简单的像函数, 可直接查拉普拉斯变换表求取原函数; 对于复杂的像函数则采用部分分式展开法化成简单的部分分式之和, 再求其原函数。

## 2. 部分分式展开法

对于像函数，常可以写成如下形式：

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (A-24)$$

$$= \frac{k(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \quad (n \geq m)$$

式中， $p_1, p_2, \cdots, p_n$  为  $F(s)$  的极点； $z_1, z_2, \cdots, z_m$  为  $F(s)$  的零点。  
根据极点的形式不同，下面分两种情况讨论。

### 1) 像函数 $F(s)$ 的极点都不相同

在这种情况下，像函数可展开成如下部分分式之和：

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{k_n}{s-p_n} \quad (A-25)$$

式中， $k_i$  为待定系数，可用下式求得：

$$k_i = \frac{B(s)}{A(s)}(s-p_i) \Big|_{s=p_i} = \frac{B(s)}{A'(p_i)} \quad (i=1, 2, \cdots, n) \quad (A-26)$$

根据拉普拉斯变换的线性定理，可求得原函数为

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^n k_i e^{p_i t}$$

### 2) 像函数 $F(s)$ 有重极点

假设像函数  $F(s)$  有  $r$  个重极点  $p_1$ ，其余极点均不相同，则像函数可展开成如下部分分式之和：

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{a_n (s-p_1)^r (s-p_{r+1})(s-p_n)}$$

$$= \frac{k_{11}}{(s-p_1)^r} + \frac{k_{12}}{(s-p_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{k_{1r}}{(s-p_1)} + \frac{k_{r+1}}{(s-p_{r+1})^r} + \cdots + \frac{k_n}{(s-p_n)} \quad (A-27)$$

式中，待定系数  $k_{r+1}, k_{r+2}, \cdots, k_n$  按式 (A-27) 求解， $k_{11}, k_{12}, \cdots, k_{1r}$  按如下公式求解：

$$k_{11} = F(s)(s-p_1)^r \Big|_{s=p_1}$$

$$k_{12} = \frac{d}{ds} [F(s)(s-p_1)^r] \Big|_{s=p_1}$$

$$k_{13} = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} [F(s)(s-p_1)^r] \Big|_{s=p_1}$$

$$\vdots$$

$$k_{1r} = \frac{1}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} [F(s)(s-p_1)^r] \Big|_{s=p_1}$$

像函数  $F(s)$  的原函数为

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \left[ \frac{k_{11}}{(r-1)!} t^{(r-1)} + \frac{k_{12}}{(r-2)!} t^{(r-2)} + \cdots + k_{1r} \right] e^{p_1 t} + \sum_{i=r+1}^n k_i e^{p_i t} \quad (A-28)$$

# 附录 B Z 变换与 Z 逆变换

对于线性离散系统，用差分方程来描述，用 Z 变换使差分方程变成代数方程，并推导出离散控制系统的脉冲传递函数。

## B.1 Z 变换的定义

Z 变换实质上是拉氏变换的一种扩展，也称为采样拉氏变换。在采样系统中，连续函数信号  $x(t)$  经过采样开关，变成采样信号  $x^*(t)$ ，由下式给出：

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT)$$

对上式进行拉普拉斯变换

$$\begin{aligned} X^*(s) &= L[x^*(t)] = L\left[\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)\right] \\ &= \int_0^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)\right] e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \int_0^{\infty} \delta(t - nT) e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-nTs} \end{aligned} \quad (\text{B-1})$$

任何采样信号的拉普拉斯变换中，都含有超越函数  $e^{-nTs}$ ，因此，若仍用拉普拉斯变换处理采样系统的问题，就会给运算带来很多困难。为此，引入新变量  $z$ ，令

$$z = e^{Ts} \quad (\text{B-2})$$

将  $X^*(s)$  记作  $X(z)$ ，则式 (B-1) 可以改写为

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n} \quad (\text{B-3})$$

变成了以复变量  $z$  为自变量的函数。称此函数为  $x^*(t)$  的  $z$  变换，记为

$$X(z) = Z[x^*(t)]$$

因为  $z$  变换只对采样点上信号起作用，所以上式也可以写为

$$X(z) = Z[x(t)]$$

$X(z)$  是  $x(t)$  的  $z$  变换符号，其定义是式 (B-3)，不要误以为它是  $x(t)$  的拉氏变换式  $X(s)$  中的  $s$  以  $z$  简单置换的结果；另外， $x(t)$  虽然写成连续函数，但  $Z[x(t)]$  的含义仍然是指对采样信号  $x^*(t)$  的  $z$  变换。将式 (B-3) 展开：

$$X(z) = x(0)z^0 + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \cdots + x(nT)z^{-n} \tag{B-4}$$

可见，采样函数的  $Z$  变换是变量  $z$  的幂级数。其一般项  $x(nT)z^{-n}$  具有明确的物理意义： $x(nT)$  表示采样脉冲的幅值； $z$  的幂次表示该采样脉冲出现的时刻。因此它包含着量值与时间的概念。

正因为  $Z$  变换只对采样点上信号起作用，因此，如果两个不同的时间函数  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$ ，它们的采样值完全重复，则其  $Z$  变换是相同的。即  $x_1(t) \neq x_2(t)$ ，但由于  $x_1^*(t) = x_2^*(t)$ ，则  $X_1(z) = X_2(z)$ ，就是说采样函数  $x^*(t)$  与其  $Z$  变换函数是一一对应的，但采样函数所对应的连续函数不是唯一的。

B.2 Z 变换求法

1. 基数求和法

如果已知  $x(t)$  在各采样时刻的采样值  $x(nT)$ ，就可以按式 (B-4) 写出其  $Z$  变换的级数展开式。式 (B-4) 展开后，根据无穷级数求和公式：

$$a + aq + aq^2 + \cdots = \frac{a}{1 - q}, \quad (q < 1)$$

即可求出函数的  $Z$  变换。

2. 部分分式法

设连续函数  $x(t)$  的拉普拉斯变换为有理函数式，且可展开成部分分式的形式，即

$$X(s) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s + p_i} \tag{B-5}$$

式中， $-p_i$  为  $X(s)$  的极点， $A_i$  为  $-p_i$  处的留数。

由拉普拉斯变换可知， $\frac{A_i}{s + p_i}$  所对应的原函数为  $A_i e^{-p_i t}$ ，所对应的  $Z$  变换为  $A_i = \frac{z}{z - e^{-p_i T}}$ ，由此可得：

$$X(z) = \sum_{i=1}^n A_i \frac{z}{z - e^{-p_i T}}$$

常用函数的  $Z$  变换见表 B-1，若已知函数的拉氏变换（象函数），用部分分式法将其展开，查表 B-1 对应即可。

表 B-1 常用函数 Z 变换表

序 号	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(n)$	$X(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	$e^{-nTs}$	$\delta(t - nT)$	$z^{-n}$
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z - 1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	$t$	$\frac{Tz}{(z - 1)^2}$

续表

序 号	$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(n)$	$X(z)$
5	$\frac{2}{s^3}$	$t^2$	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
6	$\frac{1}{1-e^{-Ts}}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT)$	$\frac{z}{z-1}$
7	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
8	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$te^{-at}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
9	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
10	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2-2z \cos \omega T+1}$
11	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{z(z-\cos \omega T)}{z^2-2z \cos \omega T+1}$
12	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{ze^{-aT} \sin \omega T}{z^2-2ze^{-aT} \cos \omega T+e^{-2aT}}$
13	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT} \cos \omega T}{z^2-2ze^{-aT} \cos \omega T+e^{-2aT}}$
14		$a^n$	$\frac{z}{z-a}$
15		$a^n \cos n\pi$	$\frac{z}{z+a}$

### B.3 Z 变换的基本定理

与拉普拉斯变换的性质相类似, Z 变换有线性、延迟、超前、初值、终值定理等。

#### 1. 线性定理

若

$$Z[x_1(t)] = X_1(z), \quad Z[x_2(t)] = X_2(z)$$

则

$$Z[ax_1(t) \pm bx_2(t)] = aX_1(z) \pm bX_2(z) \quad (a, b \text{ 为常数}) \quad (\text{B-6})$$

#### 2. 延迟定理

若  $t < 0, x(t) = 0, Z[x(t)] = X(z)$ , 则有:

$$Z[x(t-nT)] = z^{-n} X(z) \quad (n, T \text{ 为常数}) \quad (\text{B-7})$$

#### 3. 超前定理

若  $t < 0, x(t) = 0, Z[x(t)] = X(z)$ , 则有:

$$Z[x(t+mT)] = z^m X(z) \quad (m, T \text{ 为常数}) \quad (\text{B-8})$$



#### 4. 初值定理

若  $Z[x(t)] = X(z)$ ，则有：

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (\text{B-9})$$

#### 5. 终值定理

若  $Z[x(t)] = X(z)$ ，且  $(z-1)X(z)$  的全部极点位于单位圆内，则有：

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} [X(z)(z-1)] \quad (\text{B-10})$$

以上证明从略。

### B.4 Z 逆变换

同在拉普拉斯变换方法中相同，Z 变换方法的一个主要目的是要先获得时域函数  $x(t)$  在  $z$  域中的代数解，其最终的时域解可通过 Z 逆变换求出。当然， $X(z)$  的 Z 逆变换只能求出  $x^*(t)$ ，即只能是  $x(nT)$ ，而在非采样时刻不能得到有关连续函数的信息。

如果是理想采样器作用于连续信号  $x(t)$ ，则在  $t=nT$  瞬间的采样值  $x(nT)$  可以获得。Z 逆变换可以记为

$$Z^{-1}[X(z)] = x^*(t) \quad (\text{B-11})$$

在求 Z 逆变换时，仍假定当  $t < 0$  时， $x(t) = x(nT) = 0$  时。求 Z 逆变换的方法通常有长除法和部分分式法两种方法，下面分别进行介绍。

##### 1. 长除法

长除法即把  $X(z)$  展开成  $z^{-1}$  升幂排列的幂级数。因为  $X(z)$  的形式通常是两个  $z$  的多项式之比，即

$$X(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0} \quad (n \geq m) \quad (\text{B-12})$$

所以，很容易用长除法展成幂级数。把分子多项式除以分母多项式，所得之商按  $z^{-1}$  的升幂排列：

$$X(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \cdots + c_n z^{-n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n} \quad (\text{B-13})$$

这正是  $z$  变换的定义式。 $z^n$  项的系数  $c_n$  就是时间函数  $x(t)$  在采样时刻的值  $x(nT)$ 。因此，只要求得上述形式的级数，就得到相应采样函数的脉冲序列，即  $x(nT)$ 。

##### 2. 部分分式法

若  $X(z)$  是  $z$  的有理分式函数且  $X(z)$  没有重极点，部分分式法是先求出  $X(z)$  的极点，再将  $X(z)/z$  展开成部分分式之和的形式，即

$$\frac{X(z)}{z} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{z - z_i} \quad (\text{B-14})$$

进而，可以得到  $X(z)$  的表达式：

$$X(z) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i z}{z - z_i} \quad (\text{B-15})$$

然后逐项查  $z$  变换表，求出每一项  $A_i z / (z - z_i)$  对应的时间函数  $x_i(t)$ ，并转换为采样函数  $x_i^*(t)$ ，最后将这些采样函数相加，便可得到  $X(z)$  的 Z 逆变换  $x^*(t)$ 。

# 参考文献

- [1] 曾孟雄, 刘春节, 张屹, 等. 机械工程控制基础. 北京: 电子工业出版社, 2011.
- [2] 杨叔子, 杨克冲. 机械工程控制基础 (第五版). 武汉: 华中科技大学出版社, 2006.
- [3] 陈伯时. 电力拖动自动控制系统. 北京: 机械工业出版社, 2007.
- [4] [日]绪方胜彦. 现代控制工程. 卢伯英, 佟明安, 罗维铭, 译. 北京: 科学出版社, 1978.
- [5] 李友善. 自动控制原理 (第三版). 北京: 国防工业出版社, 2008.
- [6] 张苏英. 自动控制原理考研试题分析与解答技巧. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2006.
- [7] 谢莉萍, 顾家箐. 自动控制原理学习指导与习题解答. 北京: 机械工业出版社, 2010.
- [8] 冯江, 王晓燕. 自动控制原理学习指南. 北京: 北京理工大学出版社, 2007.
- [9] 王莹莹, 袁少强, 程涛. 自动控制原理全程导学及习题全解. 北京: 中国时代科技出版社, 2006.
- [10] 任伟建. 自动控制原理知识要点与习题解析. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学出版社, 2006.
- [11] 葛思纂, 张爱民, 杜行俭, 等. 自动控制理论要点与题解. 西安: 西安交通大学出版社, 2006.
- [12] 郑大钟. 线性系统理论 (第2版) 习题与解答. 北京: 清华大学出版社, 2005.
- [13] 王积伟, 张祖顺, 王蕊. 控制工程基础学习指导与习题详解. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [14] 王洪斌, 魏立新. 自动控制理论学习指导. 大连: 大连理工大学出版社, 2004.
- [15] 方斌. 自动控制原理学习指导与题解. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2003.
- [16] 李友善, 梅晓榕. 自动控制原理 360 题. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2002.
- [17] 张冬研, 孙丽萍, 岳琪. 自动控制理论学习指导. 哈尔滨: 东北林业大学出版社, 2003.
- [18] 吕汉兴. 自动控制原理学习指导与题解. 武汉: 华中科技大学出版社, 2003.
- [19] 刘慧英. 自动控制原理导教导学导考. 西安: 西北工业大学出版社, 2003.